

PARÂMETROS DE GRAFOS EM VULNERABILIDADE DE REDES

Braulino de Mattos Reis Neto

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO.

Aprovada por:

---

Prof<sup>a</sup>. Nair Maria Maia de Abreu, D.Sc.

---

Prof<sup>a</sup>. Carla Silva Oliveira, D.Sc.

---

Prof. Oswaldo Vernet de Souza Pires, D.Sc.

---

Prof. Paulo Oswaldo Boaventura Netto, Dr.Ing.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
SETEMBRO DE 2005

REIS NETO, BRAULINO DE MATTOS

Parâmetros de Grafos em Vulnerabilidade  
de Redes [Rio de Janeiro] 2005

VIII, 84 p., 29.7 cm, (COPPE/UFRJ,  
M.Sc., Engenharia de Produção, 2005)

Dissertação - Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE

1. Grafos

I. COPPE/UFRJ II. Título (Série)

*Aos meus queridos pais Paulino e Josefa*

# Agradecimentos

A Deus, arquiteto do Universo, que me fez continuar a lutar pelos meus objetivos quando por várias vezes pensei em desisti.

À minha orientadora, professora Nair Maria Maia de Abreu, por todo o apoio, dedicação, carinho, amizade, confiança e paciência a mim dedicados durante o mestrado.

Aos professores Oswaldo Vernet de Souza e Paulo Oswaldo Boaventura Netto participantes da banca examinadora.

À professora Carla Silva Oliveira que integra a banca examinadora dessa dissertação e me co-orientou com dedicação, amizade, paciência e zelo para o perfeito findamento desse trabalho.

Aos meus pais que me incentivaram, motivaram e lutaram para me propiciar as condições necessárias para que eu pudesse fazer o mestrado apesar das adversidades.

À Daniela, minha esposa amada, que esteve comigo em todos os momentos.

Aos meus queridos amigos, pelo companherismo, apoio e estímulo. Em particular, à Valdir Melo, Leonardo Ribeiro, Daniel Arêas, Paulo Jorge e Leonardo Lima.

Aos colegas do grupo Teoria Espectral de Grafos pelo apoio e pelas sugestões feitas a esse trabalho.

À amiga Camilla Peixoto pelo apoio em momentos decisivos dessa dissertação.

Aos professores, funcionários, monitores do laboratório e alunos do Programa de Engenharia de Produção da COPPE/UFRJ.

Finalmente, à CAPES pelo incentivo financeiro.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## PARÂMETROS DE GRAFOS EM VULNERABILIDADE DE REDES

Braulino de Mattos Reis Neto

Setembro/2005

Orientadora: Nair Maria Maia de Abreu

Programa: Engenharia de Produção

Dada uma rede qualquer e um grafo  $G$  que a modela, chamado grafo suporte, deseja-se quantificar a vulnerabilidade da rede pela determinação de parâmetros capazes de medi-la, informando como ou quanto  $G$  se transforma num grafo desconexo. Assim, por vulnerabilidade de rede entende-se a propensão que uma rede tem para ser destruída e diz-se que uma rede é mais vulnerável do que outra, quando for possível desconectar a primeira com um esforço menor do que o empregado para desconectar a segunda. Nesta dissertação estão reunidos os parâmetros de vulnerabilidade de redes e os principais resultados a eles relacionados encontrados na literatura visando padronizar a notação e a nomenclatura para disponibilizá-los aos interessados nesta área atualmente tão estudada. Ao final é apresentada uma ordenação parcial de grafos relativa a um  $q$ -operador de vulnerabilidade. Uma análise envolvendo comparação de grafos quanto à vulnerabilidade e adequação dos parâmetros à pertinência do operador é discutida baseada em testes feitos nas árvores e nos grafos unicíclicos.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## PARAMETERS OF GRAPHS IN VULNERABILITY OF NETWORKS

Braulino de Mattos Reis Neto

September/2005

Advisor: Nair Maria Maia de Abreu

Department: Production Engineering

Given any network and a graph  $G$  that models it, called support graph, it is desired to quantify the vulnerability of the network by the determination of parameters capable of measuring it, informing how or how much of  $G$  is transformed into a disconnected graph. Thus, for vulnerability of network it is understood the propensity that a network has to be destroyed and it is said that a network is more vulnerable than another one, when it is possible to detach the first network with a minor effort than the used to detach the second one. In this monograph are congregated the parameters of vulnerability of networks and the main results to them related found in literature aiming to standardize the notation and the nomenclature to give its' access to the interested parties in this currently so studied area. At the end, it's introduced a partial ordering of graphs related to a  $q$ -operator of vulnerability. An analysis involving comparison of graphs in relation with the vulnerability and adequacy of the parameters to the relevancy of the operator is discussed based in tests made in trees and in the unicycles graphs.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos Básicos de Grafos Relativos à Vulnerabilidade de Redes</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Parâmetros Convencionais de Vulnerabilidade</b>	<b>19</b>
3.1	Conectividades Clássicas . . . . .	20
3.2	Quesito de Conectividade . . . . .	23
3.3	Um Parâmetro Espectral - A Conectividade Algébrica . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Parâmetros Não-Convencionais de Vulnerabilidade</b>	<b>36</b>
4.1	Mínimo m-grau . . . . .	36
4.2	Coesão . . . . .	38
4.3	Conectividade Condicional . . . . .	40
4.4	Conectividade Média . . . . .	42
4.5	Persistência . . . . .	45
4.6	Integridade . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Vulnerabilidade e Hamiltonicidade</b>	<b>53</b>
5.1	Resistência . . . . .	53
5.2	Número de Dispersão . . . . .	58
5.3	Número de Ligação . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Ordenação em Classes de Grafos</b>	<b>63</b>
6.1	Ordenações em Árvores . . . . .	65
6.1.1	Caminhos . . . . .	66
6.1.2	Estrelas . . . . .	68
6.1.3	Sobre Ordenações no Caso Geral . . . . .	69
6.2	Ordenações em Grafos Unicíclicos . . . . .	70
6.2.1	Ciclos . . . . .	70

6.2.2	Sobre Ordenações no Caso Geral . . . . .	71
<b>7</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>74</b>
	<b>Referências</b>	<b>77</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo de redes é de grande interesse na área científica, visto que muitos sistemas existentes no mundo real tomam essa forma. De fato, muitos trabalhos têm sido publicados nessa área sob o enfoque dos diferentes tipos de redes, dentre as mais tradicionais destacam-se: as de transportes [ASBS00, CHE02, FF71, KSM03], as de eletricidade [ASBS00, Wa99, WS98], as de distribuição de água ou de esgoto, as de mercadorias, as associadas aos serviços de correios [GK77], as de telefonia e de comunicação [VY04] e até aquelas referentes à busca de citações bibliográficas [ER90]. Existem ainda as redes sociais que envolvem relações humanas, desde as familiares até as comerciais e administrativas [Ma75, Mo34, PA93, Sc00]. Nos dias de hoje, com o advento da Engenharia Genética, as redes biológicas, as hereditárias, as neurais [Ba04, Sp02, WSTB86], as sangüíneas [DWM02, WBE99], as metabólicas [FW00, JTAOB00, WF01] e as que descrevem cadeias alimentares [DWM02] também se destacam. Finalmente, as redes de computadores [CS90, Ga87], a *Internet* [BC01, FFF99], a *Intranet* e a *World Wide Web* [Hu01, KKRRT99] se destacam não só pelo enorme número de vértices, mas também pela mudança de sua topologia a todo instante. Essas estão causando uma verdadeira revolução no mundo pós-industrial e, por isso, têm demandado enorme interesse de pesquisadores e cientistas [Ne03].

Uma rede pode ser modelada por um objeto matemático chamado *grafo* utilizado para descrever sua estrutura topológica. Esse é constituído por um conjunto de pontos, denominados *nós* ou *vértices*, e por uma relação entre eles onde cada par, elemento da relação, é conhecido por *aresta*.

Redes enormes com milhões ou bilhões de vértices e arestas aparecem com freqüência no mundo moderno. Pesquisas recentes têm revelado uma tendência entre os pesquisadores em determinar caracterizações de propriedades estatísticas em grafos de ordem muito grande, a partir da análise particular do comportamento dos vértices e das arestas em grafos pequenos. Isso acontece pois, nos modelos de redes, o método tradicional de desenhar estruturas

topológicas para os grafos é completamente ineficaz. A *World Wide Web* com muito mais que 1 bilhão de vértices é um desses exemplos. Assim, segundo Casselman [Ca04], uma alternativa é condensar as informações em pequenos pacotes, ou seja, compilar estatísticas sobre a rede. Dessa forma, a determinação de uma ou mais medidas referentes à *vulnerabilidade* ou à *confiabilidade* de uma rede passa a ser uma questão central nesse campo de estudo.

Por *vulnerabilidade* de rede entende-se a propensão que a rede tem para ser destruída. Dada uma rede qualquer e o grafo suporte  $G$  que a modela, o que se deseja é quantificar a vulnerabilidade da rede pela determinação de parâmetros capazes de medi-la, informando de que modo  $G$  se transforma num *grafo desconexo*, isto é, num grafo com mais de uma componente conexa. Assim, diz-se que um grafo é mais vulnerável do que outro quando for possível desconectar o primeiro com um esforço menor do que o empregado para desconectar o segundo. *Confiabilidade* é a probabilidade que  $G$  tem de permanecer conexo, mesmo após a remoção de um conjunto de seus vértices e/ou arestas. Em geral, o termo *vulnerabilidade* é empregado para denotar a classe dos parâmetros determinísticos, enquanto *confiabilidade* é o termo empregado para a classe dos parâmetros probabilísticos [BBPL93, ST81].

A vulnerabilidade de uma rede é freqüentemente estimada com relação à *conectividade de vértice* ou a *conectividade de aresta* do grafo que a modela. Esses parâmetros são definidos, respectivamente, como o menor número de vértices, ou o menor número de arestas, que ao serem removidos da rede desconectam o grafo ou o deixam com um único vértice. A Figura 1.1 mostra dois grafos  $G$  e  $H$ , ambos com o mesmo número de vértices e arestas, mas com conectividade de vértice igual a 3, para  $G$  e 2, para  $H$ . Analogamente, a conectividade de aresta de  $G$  é 3 e de  $H$  é 2. Desta forma,  $H$  é *mais vulnerável* do que  $G$ . No entanto, segundo Choi e Krishna [CK89], esses parâmetros são muito simples por serem capazes de analisar a vulnerabilidade do grafo somente para um ataque ótimo, deixando de fornecer informações importantes como, quais são os vértices ou arestas que devem ser removidos para desconectar o grafo ou quais são as propriedades dos subgrafos resultantes após a remoção dos elementos do grafo, ou ainda, como a remoção de um vértice ou aresta interfere individualmente na degradação do grafo. Por outro lado, esses invariantes têm a vantagem de já terem sido amplamente estudados e, conseqüentemente, um vasto número de resultados teóricos e diversos algoritmos sobre eles estão disponíveis na literatura. Por esta razão, Doty [Do89], Hakimi e Amin [HA73] e Smith [Sm84] sugerem que a conectividade de vértice seja utilizada como uma medida secundária para auxiliar na determinação de limites para outras medidas.

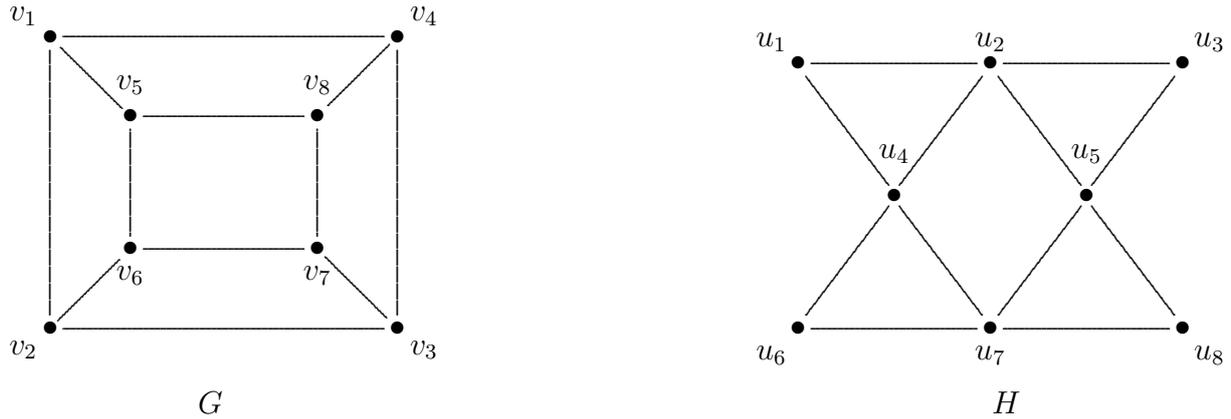


Figura 1.1: O grafo  $H$ , de conectividade de vértice 2, é mais vulnerável que o grafo  $G$ , de conectividade de vértice 3.

Em função disto, novos parâmetros determinísticos têm surgido na literatura. Dentre eles, destaca-se a *conectividade algébrica* (*algebraic connectivity*), um parâmetro espectral dado em função de um dos autovalores da matriz laplaciana de um grafo. Este parâmetro foi introduzido por Fiedler em 1973 [Fi73] e estudado em Oliveira [Ol03]. Outros parâmetros mais recentes também vêm sendo utilizados como medidas de vulnerabilidade, a *resistência de um grafo* (*toughness*) [Ch73], a *integridade de um grafo* (*integrity*) [BES87a], o *número de dispersão* (*scattering number*) [Ju78] e o *número de ligação* (*binding number*) [Wo73]. Os probabilísticos mais citados são a *confiabilidade entre todos os terminais* (*all-terminal reliability*) ou, simplesmente, a confiabilidade do grafo, a *confiabilidade entre dois terminais* (*two-terminal reliability*) [Bo86, Co87] e a *elasticidade* (*resilience*) [VF72].

A geração de grafos aleatórios parece uma forma bem apropriada na modelagem de problemas reais do mundo moderno e foram inicialmente estudados por Rapoport [Ra57] e Erdős e Rényi [ER59, ER60]. Nesses modelos, arestas não-direcionadas são colocadas aleatoriamente entre pares de um número fixo  $n$  de vértices para se criar uma rede onde cada uma das  $\frac{1}{2}n(n-1)$  arestas possíveis é independentemente escolhida com uma dada probabilidade  $p$ . Os graus dos vértices do grafo são dados, em geral, por uma distribuição Binomial ou por uma Poisson, quando  $n \rightarrow +\infty$ . Grafos aleatórios aparecem como os modelos mais eficientes na representação de problemas que envolvem redes dinâmicas, onde as arestas aparecem ou desaparecem a cada tempo com uma dada probabilidade, segundo as circunstâncias de cada caso. Isso tem motivado matemáticos como Bollobás, Karoński e outros a estudarem esses grafos, de modo que eles têm conseguido obter uma série de resultados, rigorosamente provados, que vêm sendo úteis em problemas de grande porte [BRST01, Ka82].

Outras características interessantes das redes reais têm atraído a atenção de alguns pesquisadores que perceberam que muitas delas que realmente retratam situações reais apresentam grandes grupamentos (ou *clusterização*). Mais especificamente, se um vértice  $v_i$  é ligado a um

vértice  $v_j$  e esse é ligado a  $v_k$ , então é altamente provável que  $v_i$  esteja ligado a  $v_k$ , formando estruturas de comunidades. Isto significa que existem grupos (ou *clusters*) de vértices na rede entre os quais há uma alta densidade de arestas, enquanto é baixa a densidade delas entre vértices de grupos distintos [BW00, Sc00, WF94]. Grafos assim são improváveis de serem gerados aleatoriamente. Desta forma, apesar dos grafos aleatórios modelarem bem alguns problemas, eles são incapazes de capturar certas características que podem aparecer nas redes de *clusters*, pois a completa aleatoriedade atribuída ao modelo pode impossibilitar o aparecimento de grupos ou comunidades nelas.

O objetivo deste trabalho é reunir os parâmetros determinísticos disponíveis na literatura utilizados na avaliação da vulnerabilidade de redes, apresentando os resultados mais significativos de cada um, exemplificando-os em diversos grafos para analisá-los e compará-los. Discute-se ainda em classes específicas de grafos sobre a complexidade de determiná-los, apresentando as vantagens e desvantagens de empregá-los. Desta forma, a dissertação se desenvolve apresentando no Capítulo 2, os conceitos básicos de Grafos relativos à vulnerabilidade de redes; no Capítulo 3, os parâmetros convencionais de conectividade de um grafo (conectividades de vértice e de aresta) e o quesito de conectividade, parâmetro determinado via Programação Matemática, com base no Teorema de Menger, estudado em problemas de Fluxos em Redes. A conectividade algébrica será apresentada ainda nesse capítulo junto com os seus principais resultados referentes às medidas clássicas citadas; no Capítulo 4, os parâmetros de grafos não-convencionais relativos à vulnerabilidade de redes são descritos com suas nomenclaturas e notações padronizadas e seus resultados mais importantes explicados e, no Capítulo 5, são apresentados parâmetros de vulnerabilidade de redes que são mais utilizados no estudo da hamiltonicidade. No Capítulo, 6 é introduzida uma ordenação parcial em classes de grafos relativa a uma lista de parâmetros de vulnerabilidade e, finalmente, no Capítulo 7, algumas considerações são apresentadas.

# Capítulo 2

## Conceitos Básicos de Grafos Relativos à Vulnerabilidade de Redes

Neste capítulo são apresentados apenas os conceitos da Teoria dos Grafos necessários à compreensão deste texto, como a definição de grafo conexo, componentes conexas, caminho, diâmetro, cintura e outros diretamente relacionados à vulnerabilidade de redes [Bi93, Bo01, GR01, GL00, Go88, Ha69, Ha95].

**Definição 2.1.** Um grafo  $G = (V, E)$  é uma estrutura discreta, usualmente denotada por  $G$ , onde  $V$  é um conjunto discreto não-vazio, finito ou não, cujos elementos são denominados nós ou vértices e  $E$ , um conjunto de arestas, as quais são pares (ordenados ou não) de elementos de  $V$ .

Na Definição 2.1, se uma aresta do grafo tem coordenadas iguais é denominada *laço*; se o par é ordenado, o grafo é conhecido por *grafo orientado* ou *digrafo* e se há mais de duas arestas ligando o mesmo par de vértices (arestas paralelas) a estrutura é chamada de *multigrafo*.

Neste texto são considerados apenas grafos simples, isto é, grafos finitos, sem laços, sem arestas paralelas e direcionadas, como o grafo  $G_1$  da Figura 2.1.

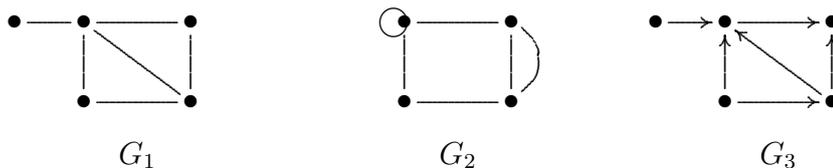


Figura 2.1:  $G_1$  é um grafo simples,  $G_2$  um multigrafo e  $G_3$  é um digrafo.

**Definição 2.2.** A ordem de um grafo  $G = (V, E)$ , denotada por  $n$ , é definida como a cardinalidade do conjunto  $V$  e o tamanho de  $G$ , denotado por  $m$ , é definido como a cardinalidade de  $E$ . Assim,  $n$  é o número de vértices e  $m$  o número de arestas de  $G$ .

Os vértices de um grafo  $G = (V, E)$  podem ser representados por  $v_1, v_2, \dots, v_n$  e uma aresta por  $e = \{v_i, v_j\}$ ,  $e = v_i v_j$  ou  $e = v_j v_i$ . Em digrafos, a aresta  $e = (v_i, v_j)$  indica o sentido de  $v_i$  para  $v_j$ . A aresta  $(v_j, v_i)$  é diferente da anterior e define o sentido de  $v_j$  para  $v_i$ . Em geral, nos digrafos, as arestas são tratadas por *arcos*.

**Definição 2.3.** Se  $e = \{v_i, v_j\}$  é uma aresta de  $G$ , então diz-se que  $e$  liga  $v_i$  a  $v_j$  e que  $v_i$  e  $v_j$  são as extremidades de  $e$ . Nesse caso,  $v_i$  e  $v_j$  são vértices incidentes em  $G$ , a aresta  $e$  incide em  $v_i$  e  $v_j$ , e finalmente,  $v_i$  e  $v_j$  são vértices adjacentes ou vizinhos em  $G$ .

No grafo  $G$  da Figura 2.2, tem-se que  $e_1$  incide em  $v_1$  e  $v_2$  e  $e_2$  incide em  $v_1$  e  $v_3$ . Logo,  $v_1$  e  $v_2$  são as extremidades de  $e_1$ , enquanto  $v_1$  e  $v_3$  são as extremidades de  $e_2$ . Conseqüentemente,  $v_1$  é adjacente a  $v_2$  e  $v_3$ , mas  $v_2$  e  $v_3$  não são adjacentes.

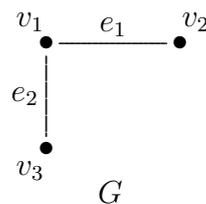


Figura 2.2:  $G$  e suas relações de adjacência e incidência.

**Definição 2.4.** Seja  $G = (V, E)$  um grafo e  $v \in V$  um vértice de  $G$ . O conjunto formado por todos os vértices adjacentes a  $v$  é denominado vizinhança de  $v$  e denotado por  $\Gamma(v)$ .

No grafo  $G$  da Figura 2.2, tem-se que  $\Gamma(v_1) = \{v_2, v_3\}$ ,  $\Gamma(v_2) = \{v_1\}$  e  $\Gamma(v_3) = \{v_1\}$ .

**Definição 2.5.** O grau de um vértice  $v$ , denotado por  $d(v)$ , é dado pelo número de arestas nele incidentes.

Na Figura 2.2, os graus dos vértices  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  são, respectivamente, 2, 1 e 1 sendo denotados por  $d(v_1) = 2$ ,  $d(v_2) = 1$  e  $d(v_3) = 1$ .

**Definição 2.6.** O grau mínimo de  $G$ ,  $\delta(G)$ , é o menor grau dentre todos os outros e o grau máximo,  $\Delta(G)$ , é o maior grau dentre todos os graus dos vértices de  $G$ .

Na Figura 2.2, o grau máximo de  $G$  é  $\Delta(G) = 2$  e o grau mínimo é  $\delta(G) = 1$ .

**Definição 2.7.** Um grafo  $G = (V, E)$  é dito  $k$ -regular se,  $\forall v \in V$ ,  $d(v) = k$ .

Da Definição 2.7, se  $G$  é  $k$ -regular então  $\delta(G) = \Delta(G) = k$ . Na Figura 2.3 tem-se que todos os vértices do grafo  $G$  têm grau 3 e, daí,  $G$  é 3-regular. Os grafos 3-regulares são conhecidos por *grafos cúbicos* e esses são muito estudados em Teoria dos Grafos [GR01].

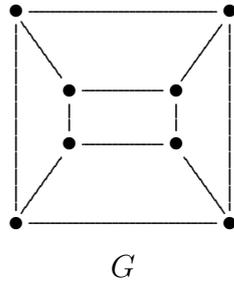


Figura 2.3: Um grafo 3-regular.

**Definição 2.8.** Os grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  são ditos isomorfos, se existir uma bijeção  $\theta : V_1 \mapsto V_2$  tal que  $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\theta(x), \theta(y)\} \in E_2$ . A bijeção  $\theta$  é um isomorfismo entre  $G_1$  e  $G_2$  e usa-se a notação  $G_1 \approx G_2$  para dizer que  $G_1$  e  $G_2$  são isomorfos. Caso contrário, denota-se  $G_1 \not\approx G_2$  e diz-se que esses grafos são não-isomorfos.

Na Figura 2.4, tem-se dois grafos isomorfos  $G_1$  e  $G_2$ , visto que existe um isomorfismo  $\theta$  associando cada vértice  $v_i$  de  $G_1$  a um outro  $u_i$  de  $G_2$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, 8$ . Por exemplo,  $\theta(v_1) = u_1$ ,  $\theta(v_2) = u_2$ ,  $\theta(v_3) = u_3$ ,  $\theta(v_4) = u_4$ ,  $\theta(v_5) = u_5$ ,  $\theta(v_6) = u_6$ ,  $\theta(v_7) = u_7$  e  $\theta(v_8) = u_8$ .

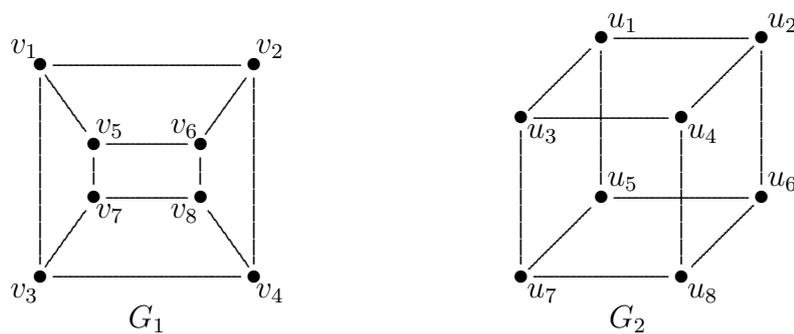


Figura 2.4: Grafos isomorfos.

**Definição 2.9.** Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Se  $V_1 \subseteq V$  e  $E_1 \subseteq E$ , diz-se que  $G_1 = (V_1, E_1)$  é um subgrafo de  $G$ . Além disso, se  $G_1$  contém todas as arestas  $\{v_i, v_j\} \in E$  com  $v_i, v_j \in V_1$ , então  $G_1$  é um subgrafo induzido de  $G$ , denotado por  $\langle V_1 \rangle_G$ .

Na Figura 2.5 tem-se um grafo  $G$  com  $G_1$  como um de seus subgrafos e  $G_2$  como um de seus subgrafos induzidos.

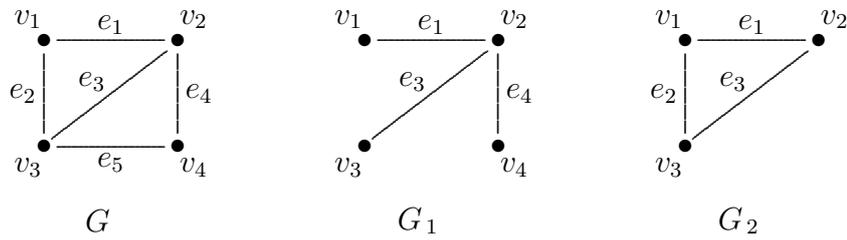


Figura 2.5:  $G_1$  é um subgrafo e  $G_2$  é um subgrafo induzido de  $G$ .

**Definição 2.10.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Diz-se que  $S = (V_S, E_S)$  é um subgrafo abrangente ou subgrafo gerador de  $G$ , se  $V_S = V$  e  $E_S \subset E$ .*

Da Definição 2.10, tem-se que um subgrafo abrangente de  $G$  tem os mesmos vértices de  $G$  e um subconjunto de suas arestas. Na Figura 2.5,  $G_1$  é um subgrafo abrangente de  $G$ , mas  $G_2$  não é.

**Definição 2.11.** *Um subgrafo abrangente de  $G$  que seja  $k$ -regular é denominado um  $k$ -fator.*

O grafo  $G$  da Figura 2.6 tem  $S$  como um de seus subgrafos abrangentes tal que  $S$  é um 2-fator.

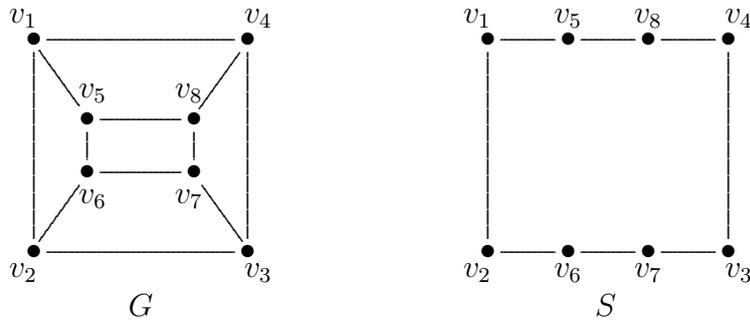


Figura 2.6:  $S$  é um 2-fator de  $G$ .

**Definição 2.12.** *Um caminho  $P_n$  é um grafo de ordem  $n$  formado por uma seqüência alternada e finita entre vértices e arestas que se inicia num vértice  $v_i$  e termina num vértice  $v_j$ , onde cada aresta da seqüência liga o vértice que a antecede ao que a sucede, de modo que os vértices sejam todos distintos.*

Na Figura 2.7, tem-se caminhos de ordem 1, 2, 3 e 4.

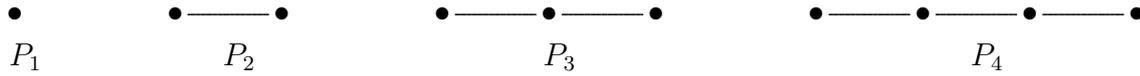


Figura 2.7: Caminhos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$ .

**Definição 2.13.** Um ciclo  $C_n$  é um grafo de ordem  $n$  formado por um caminho fechado, ou seja, por um caminho onde o primeiro e o último vértices coincidem.

Na Figura 2.8, tem-se ciclos de ordem 3, 4 e 5.

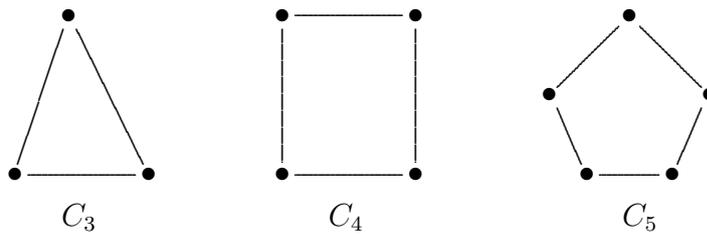


Figura 2.8: Ciclos de ordem 3, 4 e 5

Considere o grafo  $G$  da Figura 2.9.  $G$  tem um único subgrafo que é um ciclo definido por  $\{v_1v_3, v_3v_4, v_4v_2, v_2v_1\}$  e tem vários subgrafos que são caminhos, dentre eles:  $\{v_1v_3, v_3v_4, v_4v_2, v_2v_5\}$ . O grafo  $H$  da Figura 2.10 é um subgrafo abrangente do grafo  $G$  da Figura 2.9.

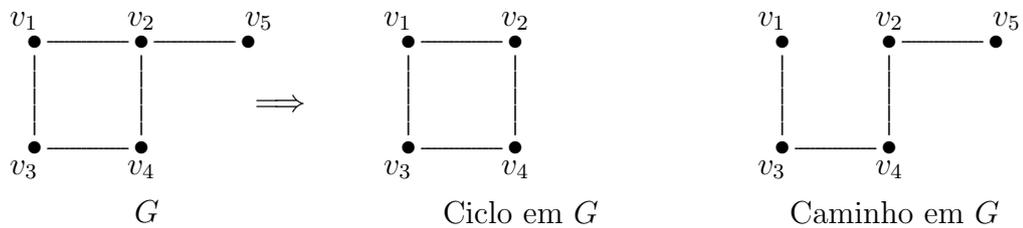


Figura 2.9: Um grafo  $G$ , seu ciclo e um de seus caminhos.

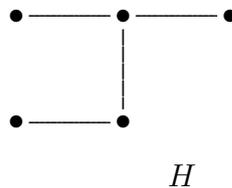


Figura 2.10:  $H$  é um subgrafo abrangente de  $G$ .

**Definição 2.14.** Denominam-se, respectivamente, cintura de  $G$ ,  $g(G)$ , e circunferência de  $G$ ,  $c(G)$ , os comprimentos do menor e do maior ciclos de um grafo  $G$ .

Os grafos que não possuem ciclos são chamados florestas e serão apresentadas mais adiante na Definição 2.31. Na Figura 2.11 tem-se um grafo  $G$  com cintura  $g(G) = 3$  e circunferência  $c(G) = 8$ .

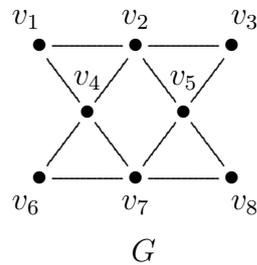


Figura 2.11: Grafo  $G$  com  $g(G) = 3$  e  $c(G) = 8$ .

**Definição 2.15.** Um percurso num grafo  $G$  é uma seqüência finita e alternada de vértices e arestas que se inicia num vértice  $v_i$  e termina num vértice  $v_j$ , na qual cada aresta da seqüência liga o vértice que a antecede com aquele que a sucede.

Na Definição 2.15 não é exigido que os vértices na seqüência sejam todos distintos. Isso é que distingue percursos de caminhos, ou seja, um caminho é um percurso muito particular em que é proibida a repetição de vértices.

**Definição 2.16.** Um circuito num grafo  $G$  é um percurso fechado, ou seja, um percurso onde o primeiro e o último vértices coincidem.

A diferença entre circuito e ciclo é análoga à diferença entre caminho e percurso.

**Definição 2.17.** Um grafo  $G = (V, E)$  é dito euleriano se for possível sair de um vértice  $v \in V$  percorrer todas as suas arestas apenas uma vez e retornar a  $v$ .

Pela Definição 2.17, tem-se que um grafo é euleriano se possuir um circuito abrangente onde as arestas não são repetidas.

**Definição 2.18.** Um grafo  $G = (V, E)$  é dito hamiltoniano se for possível sair de um vértice  $v \in V$  passar por todos os vértices uma única vez e retornar a  $v$ .

**Definição 2.19.** Um grafo  $G$  é dito  $k$ -fatorável se ele tiver um subgrafo gerador constituído pela união de  $k$ -fatores.

O grafo  $G$  da Figura 2.12 é 2-fatorável, pois possui um 2-fator como subgrafo.

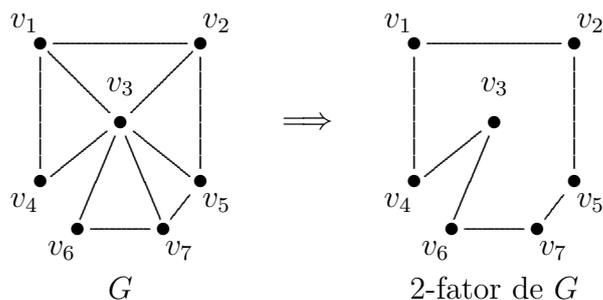


Figura 2.12: Grafo  $G$  2-fatorável.

**Teorema 2.1 (Kratsch *et al.* [KLM96]).** *Todo grafo hamiltoniano é 2-fatorável.*

Observe que o grafo  $G$  da Figura 2.12 é 2-fatorável e hamiltoniano, porém esses dois conceitos não são equivalentes. O Teorema 2.1 mostra que a propriedade de um grafo  $G$  ser 2-fatorável é fundamental para que seja hamiltoniano, visto que um ciclo hamiltoniano é, ele mesmo, um 2-fator e, portanto, todo grafo hamiltoniano é 2-fatorável. Porém, a recíproca não é verdadeira, pois são conhecidos grafos 2-fatoráveis que não são hamiltonianos. Assim, apesar da existência de um algoritmo polinomial que determina se um grafo é 2-fatorável [LP86], o problema do ciclo hamiltoniano é difícil mesmo sobre os grafos 2-fatoráveis. O grafo  $G$  da Figura 2.13 é um exemplo de um grafo 2-fatorável, mas não hamiltoniano.

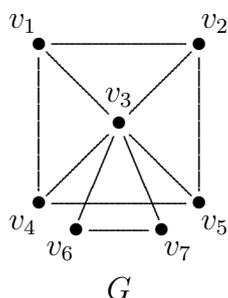


Figura 2.13: Grafo  $G$  2-fatorável, mas não-hamiltoniano.

**Definição 2.20.** *A distância entre dois vértices  $v_i$  e  $v_j$  de um grafo  $G$ , denotada por  $d(v_i, v_j)$ , corresponde ao comprimento do menor caminho ligando esses dois vértices.*

Na Definição 2.20 considera-se o comprimento do caminho que liga dois vértices  $v_i$  e  $v_j$  do grafo como o menor número de arestas que devem ser percorridas para alcançar  $v_j$ , partindo-se de  $v_i$  e vice-versa.

**Definição 2.21.** *O diâmetro  $d_G$  e o raio  $\rho(G)$  de um grafo  $G$  são definidos, respectivamente, como a maior e a menor distância dentre todas as distâncias entre pares de vértices em  $G$ .*

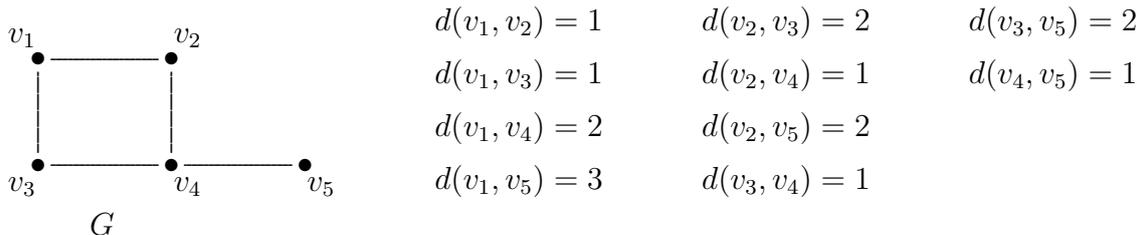


Figura 2.14: O diâmetro do grafo  $G$  é igual a 3.

Na Figura 2.14 tem-se as distâncias entre todos os pares de vértices, permitindo-se assim determinar seu diâmetro que neste caso é 3 .

Se um grafo com diâmetro muito grande estiver modelando uma rede, esta parece oferecer uma pior comunicação do que aquela cujo grafo que a modela tenha um diâmetro menor. Portanto, o diâmetro de um grafo pode ser utilizado para medir o pior caso de comunicação entre nós da rede modelada pelo grafo.

**Definição 2.22.** Um grafo  $G$  é dito conexo quando existe pelo menos um caminho entre qualquer par de vértices. Caso contrário, o grafo é dito desconexo.

**Definição 2.23.** Um grafo desconexo  $G$  é formado por pelo menos dois subgrafos induzidos conexos denominados componentes conexas de  $G$ . O número de componentes conexas de  $G$  é denotado por  $n_c(G)$ .

Na Figura 2.15, o grafo  $G_1$  é conexo e  $G_2$  é desconexo com duas componentes conexas.

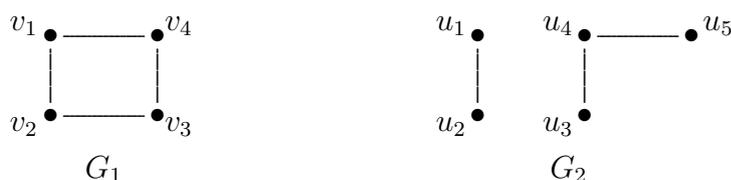


Figura 2.15:  $G_1$  é conexo e  $G_2$  é desconexo.

No grafo da Figura 2.16, partindo-se dos subconjuntos disjuntos de  $V$ ,  $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ,  $V_2 = \{v_5, v_6\}$ ,  $V_3 = \{v_7, v_8, v_9\}$  e  $V_4 = \{v_{10}\}$ , obtém-se os subgrafos induzidos  $\langle V_1 \rangle_G$ ,  $\langle V_2 \rangle_G$ ,  $\langle V_3 \rangle_G$  e  $\langle V_4 \rangle_G$ , os quais são as componentes conexas de  $G$ . Logo, tem-se que  $n_c(G) = 4$ .

Quando  $G$  é um grafo conexo, diz-se que  $G$  tem uma única componente conexa.

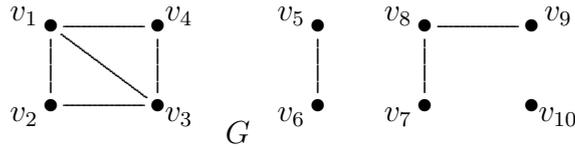


Figura 2.16:  $G$  é desconexo constituído por quatro componentes conexas.

Convenciona-se que a distância entre dois vértices que não estão na mesma componente conexa do grafo é  $+\infty$ . Logo, o diâmetro de qualquer grafo desconexo é  $+\infty$  e qualquer grafo conexo tem diâmetro finito.

**Definição 2.24.** Um grafo completo de ordem  $n$ ,  $K_n$ , é um grafo tal que todo par de vértices é adjacente.

Tem-se que um grafo completo  $K_n$  é  $(n - 1)$ -regular e para  $n \geq 3$  a cintura é 3 e a circunferência é  $n$ , isto é,  $g(K_n) = 3$  e  $c(K_n) = n$ .

**Definição 2.25.** Seja  $G$  um grafo. Se  $H$  é um subgrafo de  $G$  isomorfo a  $K_n$ , então diz-se que  $H$  é uma clique de  $G$ .

Na Figura 2.17 tem-se um grafo  $G$ , o qual possui uma clique  $K_5$  que é maximal em  $G$ , ou seja, não existe em  $G$  outra clique maior que a contenha.

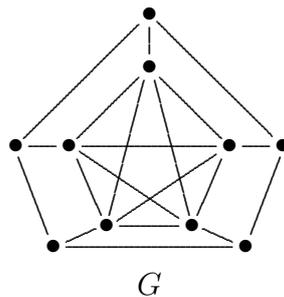


Figura 2.17: Grafo  $G$  e sua clique maximal  $K_5$ .

**Definição 2.26.** Um grafo  $G = (V, E)$  é dito bipartido se  $V$  é formado pela união de dois conjuntos disjuntos de vértices  $V_1$  e  $V_2$  tais que toda aresta  $e \in E$  tem uma extremidade em  $V_1$  e a outra em  $V_2$ . Se  $|V_1| = s$  e  $|V_2| = p$  e existir uma aresta ligando quaisquer pares de vértices  $u$  e  $v$  com  $u \in V_1$  e  $v \in V_2$  então diz-se que o grafo é bipartido completo e nota-se por  $K_{s,p}$ .

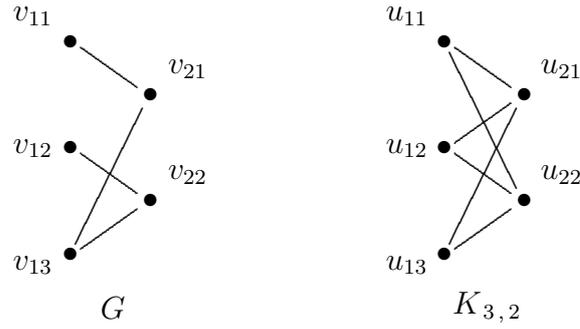


Figura 2.18:  $G$  é um grafo bipartido e  $K_{3,2}$  é bipartido completo.

**Definição 2.27.** O grafo bipartido completo  $K_{1,s}$  é denominado grafo estrela.

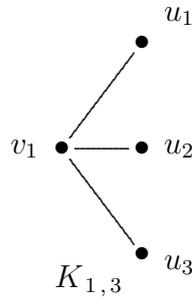


Figura 2.19: Grafo estrela  $K_{1,3}$ .

**Definição 2.28.** Um grafo  $G = (V, E)$  é dito trivial se  $V \neq \emptyset$  e  $E = \emptyset$ .

**Definição 2.29.** Sejam  $G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$  dois grafos tais que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . O grafo união  $G = G_1 \cup G_2$  é obtido pela união dos vértices e das arestas de  $G_1$  e  $G_2$ , ou seja,  $V = V_1 \cup V_2$  e  $E = E_1 \cup E_2$ .

**Definição 2.30.** Seja  $G = (V, E)$  um grafo. O grafo complementar de  $G$ , denotado por  $\overline{G}$ , é o grafo que tem o mesmo conjunto de vértices de  $G$  e uma aresta  $e \in E(\overline{G})$  se e somente se  $e \notin E(G)$ .

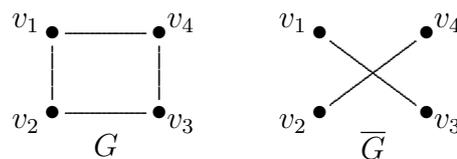


Figura 2.20:  $\overline{G}$  é o grafo complementar de  $G$ .

Dado que  $K_n$  possui  $\frac{n(n-1)}{2}$  arestas, esse é o limite superior do número de arestas para um grafo simples  $G$ . Desta forma, se  $G$  tem  $m$  arestas então  $\overline{G}$  tem  $\frac{n(n-1)}{2} - m$  arestas.

Pelas Definições 2.24 e 2.28, tem-se que o complementar de um grafo trivial de ordem  $n$  é o grafo  $K_n$  e vice-versa. Além disso, o complementar de um grafo bipartido completo  $K_{s,p}$  é o grafo obtido pela união dos grafos completos  $K_s$  e  $K_p$ ,  $K_s \cup K_p$ . Por exemplo, o grafo da Figura 2.21 é o complementar do grafo  $K_{3,2}$  da Figura 2.18. Um resultado imediato decorrente da Definição 2.30 é que  $\overline{\overline{G}} = G$  e pode ser encontrado em [Bo01].

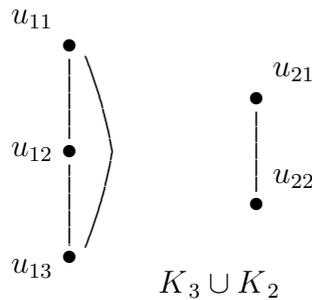


Figura 2.21:  $K_3 \cup K_2$  é o grafo complementar de  $K_{3,2}$ .

**Definição 2.31.** Um grafo  $G$  sem ciclos é denominado floresta.

Na Definição 2.31 não é exigido que o grafo seja conexo. Logo, qualquer grafo, conexo ou não, sem ciclo é uma floresta.

**Definição 2.32.** Se  $T$  é um grafo conexo e sem ciclo, então  $T$  é uma árvore .

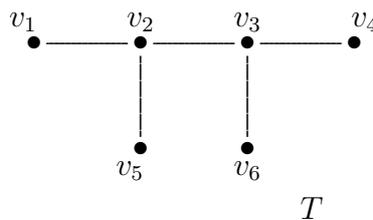


Figura 2.22: Árvore  $T$ .

A árvore  $T$  da Figura 2.22 é um grafo conexo sem ciclos com 6 vértices e 5 arestas e nota-se que a adição de uma aresta cria um único ciclo enquanto a remoção de qualquer aresta da árvore resulta num grafo desconexo. Esse é um resultado de caracterização de uma árvore que pode ser encontrado em qualquer livro básico de grafos, dentre eles [Bo01].

Conclui-se então, pelas Definições 2.31 e 2.32, que cada componente conexa de uma floresta é uma árvore como mostra a Figura 2.23.

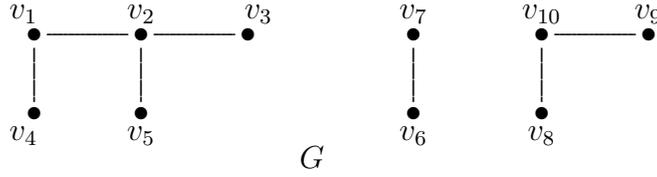


Figura 2.23: Uma floresta  $G$  com suas 3 árvores.

**Definição 2.33.** Seja  $G = (V, E)$  um grafo e  $S \subset V$  um subconjunto de vértices. Diz-se que  $S$  é um conjunto independente de  $G$ , se  $\forall v_i, v_j \in S$ ,  $v_i$  e  $v_j$  não são adjacentes.

**Definição 2.34.** Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Um conjunto  $S_0$  é dito um conjunto independente maximal de  $G$  se  $|S_0| \geq |S|$ , para todo conjunto independente  $S$  de  $G$ . A cardinalidade do conjunto independente maximal de  $G$  é denominado número de independência de  $G$  e denotado por  $\alpha(G)$ .

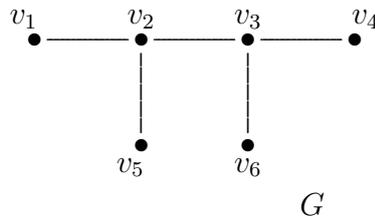


Figura 2.24: Os vértices  $v_1$ ,  $v_4$  e  $v_5$  formam um conjunto independente de  $G$ , enquanto  $\{v_1, v_4, v_5, v_6\}$  é um conjunto independente maximal de  $G$ .

Na Figura 2.24 tem-se que o conjunto independente de  $G$  com a cardinalidade máxima é  $S_0 = \{v_1, v_4, v_5, v_6\}$ . Conseqüentemente,  $\alpha(G) = 4$ .

Se uma dada partição de  $V$  em conjuntos independentes tiver  $k$  elementos,  $k \leq |V|$ , então diz-se que esta partição determina uma  $k$ -coloração para  $G$  e que  $G$  é  $k$ -cromático ou  $k$ -colorível.

Na Figura 2.25,  $G = (V, E)$  tem uma 3-coloração visto que é possível determinar uma partição em 3 subconjuntos independentes  $S_1 = \{v_1, v_4, v_7\}$ ,  $S_2 = \{v_2, v_3, v_5, v_8\}$  e  $S_3 = \{v_6\}$ . Mas esta não é a melhor forma de colorir  $G$ . É possível particionar  $V$  em apenas dois subconjuntos independentes  $S'_1 = \{v_1, v_4, v_6, v_7\}$  e  $S'_2 = \{v_2, v_3, v_5, v_8\}$ .

**Definição 2.35.** Seja  $G$  um grafo. A cardinalidade de uma partição mínima dos vértices de  $G$  em conjuntos independentes é denominada número cromático e denotado por  $\chi(G)$ .

O grafo  $G$  da Figura 2.25 tem  $\chi(G) = 2$ , que é exatamente a cardinalidade de uma partição mínima dos vértices de  $G$  em conjuntos independentes.

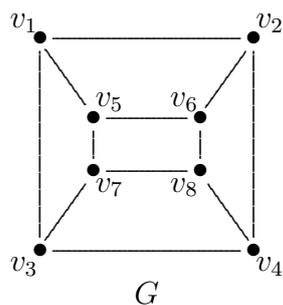


Figura 2.25: Grafo  $G$  2-colorível ou 2-cromático.

**Definição 2.36.** *Sejam  $G = (V, E)$  um grafo e  $X \subset V$  um subconjunto de vértices. Diz-se que  $X$  é um recobrimento de vértices se todo  $e \in E$  tiver ao menos uma extremidade em  $X$ . A cardinalidade do menor recobrimento de vértices num grafo  $G$  é o número de recobrimento de  $G$ , denotado por  $\beta(G)$ .*

Um recobrimento para o grafo  $G$  da Figura 2.26 é o conjunto  $X = \{ v_1, v_3, v_5, v_6 \}$ . No entanto, esta não é a melhor forma de recobrir o conjunto de vértices de  $G$ . É possível recobrir o grafo com o conjunto  $X' = \{ v_1, v_2, v_5 \}$  que tem cardinalidade 3. Logo,  $\beta(G) = 3$ .

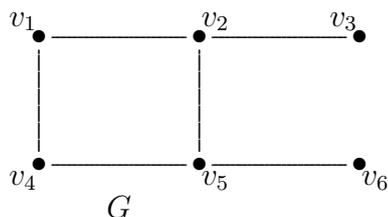


Figura 2.26: Grafo  $G$  com  $\beta(G) = 3$ .

Considere que há  $n$  pessoas numa determinada festa, onde cada par ou são amigas ou são estranhas. Deseja-se mostrar que devem existir nessa festa ou  $i$  pessoas que são mutuamente amigas ou  $j$  pessoas que são mutuamente estranhas. Esse problema pode ser modelado por um grafo com  $n$  vértices representando as pessoas e arestas ligando todos os pares de pessoas. Evidentemente é necessário fazer uma distinção entre as arestas que ligam pares de amigos e as arestas que ligam pares de estranhos. Para isso, devemos resolver o seguinte problema de coloração de arestas ( não se trata do problema de coloração clássico de arestas): tome um subgrafo  $G$  de  $K_n$  e pinte suas arestas de vermelho (essas representarão os pares de amigos), às arestas do grafo  $\overline{G}$  pinte-as de verde (essas representarão os pares de estranhos). Assim, se  $G$  contiver um subgrafo  $K_i$  pintado de vermelho, isso corresponderá à existência de  $i$  pessoas mutuamente amigas, e se  $\overline{G}$  contiver um subgrafo  $K_j$  pintado de verde, isso corresponderá a  $j$  pessoas mutuamente estranhas. Considere a Figura 2.27 que representa o caso para uma festa com 6 pessoas e, para esse caso, é possível mostrar que existem 3 pessoas mutuamente amigas ou 3 pessoas mutuamente estranhas.

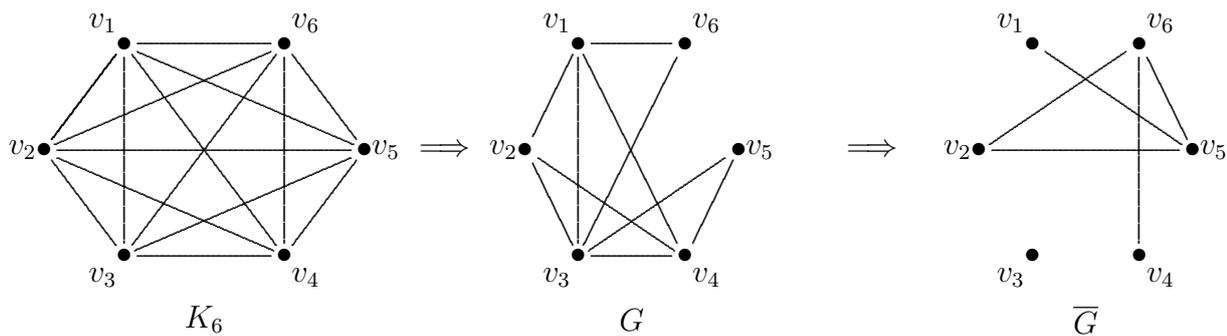


Figura 2.27: Exemplo de uma festa com 6 pessoas, das quais 3 são mutuamente amigas e/ou 3 são mutuamente estranhas.

Observe na Figura 2.27 que  $G$  contém alguns triângulos  $K_3$  pintados de vermelho, dentre eles  $\{v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3\}$ , e  $\overline{G}$  contém um triângulo  $K_3$  pintado de verde,  $\{v_2v_5, v_5v_6, v_2v_6\}$ .

**Definição 2.37.** *Sejam  $i$  e  $j$  inteiros positivos tais que  $i \geq 2$  e  $j \geq 2$ . Diz-se que um inteiro positivo  $m$  tem a  $(i, j)$ -propriedade de Ramsey se  $K_m$  contém ou um subgrafo  $K_i$  vermelho ou um subgrafo  $K_j$  verde. O número de Ramsey  $R(i, j)$  é o menor inteiro positivo que tem a  $(i, j)$ -propriedade de Ramsey.*

Como foi visto, pela Definição 2.37, 6 tem a  $(3, 3)$ -propriedade de Ramsey e, além disso, pode-se mostrar que é o menor inteiro positivo que tem essa propriedade [MR92]. Logo,  $R(3, 3) = 6$ .

## Capítulo 3

# Parâmetros Convencionais de Vulnerabilidade

Dado um grafo  $G$  que modela uma rede, deseja-se avaliar a rede segundo a vulnerabilidade pela determinação de parâmetros do grafo capazes de medir tal característica por informar de que modo, como ou quando,  $G$  pode se transformar num grafo desconexo. Por *vulnerabilidade* de rede entende-se a propensão que a rede tem para ser destruída [BBPL93, ST81]. Para isso, é necessário conhecer cada parâmetro, o que significa conhecer a definição de cada um, os resultados principais a eles relacionados e a complexidade para determiná-los.

A questão de saber se uma rede é mais (ou menos) vulnerável que outra é muito importante. Suponha, por exemplo, que uma empresa queira interligar seus computadores em redes, onde, devido a um motivo qualquer, podem ocorrer falhas em alguns dos computadores ou em algumas das ligações entre eles. Essas falhas podem comprometer a funcionalidade da rede fazendo com que pares de computadores deixem de se comunicar. Como é impossível criar uma rede que suporte uma quantidade infinita de falhas, então é de interesse que se obtenha uma rede capaz de suportar o maior número de falhas. Logo, dentre as várias topologias de redes possíveis, a empresa deve preferir escolher aquela que seja a menos vulnerável possível.

Neste capítulo são estudados os parâmetros convencionais de conectividade de grafos utilizados em Vulnerabilidade de Redes, apresentando os principais resultados encontrados na literatura e tecendo alguns comentários sobre sua aplicação e sobre a dificuldade para o seu cálculo.

### 3.1 Conectividades Clássicas

A conectividade de vértice e de aresta são os parâmetros de grafos diretamente relacionados à conectividade do grafo, sendo os primeiros a serem utilizados para medir o quanto um grafo é mais (ou menos) conexo que outro. Por isso, foram aqui consideradas como *conectividades clássicas*. São, de fato, os parâmetros mais conhecidos e utilizados, quando se trata de determinar um grafo no qual seja necessário empregar um maior (ou menor) esforço para desconectá-lo. Existe um grande número de resultados teóricos disponíveis na literatura sobre eles e diversos algoritmos capazes de estimar a conectividade de vértices e de arestas, o que facilita o desenvolvimento de pesquisas nesta área.

As definições a seguir são baseadas no livro de Boaventura Netto [Bo01].

**Definição 3.1.** A conectividade de vértice de um grafo  $G$ , denotada por  $\kappa(G)$ , é o menor número de vértices que devem ser removidos de  $G$  para desconectá-lo ou torná-lo o grafo trivial.

**Definição 3.2.** A conectividade de aresta de um grafo  $G$ , denotada por  $\lambda(G)$ , é o menor número de arestas que devem ser removidas de  $G$  para desconectá-lo ou torná-lo o grafo trivial.

No grafo  $G$  da Figura 3.1, ao se retirar o vértice  $v_3$  obtém-se um grafo desconexo. Logo,  $\kappa(G) = 1$ . Além disso, retirando-se, por exemplo, as arestas  $v_1v_2$  e  $v_1v_3$ , o grafo  $G$  também se torna desconexo, não sendo possível desconectá-lo com a remoção de somente uma aresta. Assim,  $\lambda(G) = 2$ .

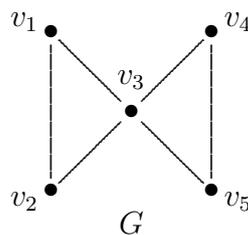


Figura 3.1: Grafo  $G$  com  $\kappa(G) = 1$  e  $\lambda(G) = 2$

A determinação das conectividades clássicas são problemas polinomiais, visto que existem algoritmos determinísticos capazes de resolvê-lo em tempo polinomial. Por exemplo, o algoritmo de Henzinger *et al.* [HRG00] de complexidade  $O(\min\{\kappa^3 + n, \kappa n\} \kappa n)$  determina a conectividade de vértice e o algoritmo de Hao e Orlin [HO94] de complexidade  $O(nm \log \frac{n^2}{m})$  determina a conectividade de aresta de um grafo qualquer. No entanto, esses parâmetros não

são fáceis de serem determinados e mesmo uma estimativa pode ser difícil de ser obtida, caso o grau mínimo do grafo seja elevado [Bo01]. Com isso, a obtenção de bons limites para as conectividades clássicas continua sendo assunto relevante nessa área.

Um resultado importante que relaciona tais parâmetros com o grau mínimo do grafo,  $\delta(G)$ , é apresentado a seguir, cuja prova se encontra em [Bo01, Ha69, Wh32].

**Teorema 3.1 (Whitney).** *Se  $G$  é um grafo conexo, então*

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

O grafo da Figura 3.2 ilustra a desigualdade do Teorema 3.1.

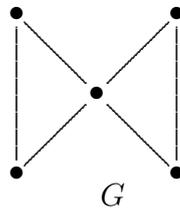


Figura 3.2: Grafo  $G$  com  $\kappa(G) = 1$ ,  $\lambda(G) = 2$  e  $\delta(G) = 2$ .

Antes de enunciar outros resultados, é necessário apresentar as definições de grafo  $k$ -conexo e de  $\lambda$ -aresta conexo.

**Definição 3.3.** *Um grafo  $G$  é dito  $k$ -conexo,  $k \geq 1$ , se  $\kappa(G) \geq k$ .*

A Definição 3.3 diz que se a remoção de  $k$  vértices não desconecta o grafo  $G$  ou se  $k$  é o número mínimo de vértices cuja remoção desconecta  $G$  então o grafo é  $k$ -conexo. Ou seja, um grafo  $G$  é  $k$ -conexo quando  $1 \leq k \leq \kappa(G)$ . Pode-se concluir dessa definição que se  $t \geq k$  então um grafo  $t$ -conexo também é  $k$ -conexo.

Na Figura 3.3 tem-se um grafo  $G$  que é 1-conexo, visto que a remoção de qualquer vértice não desconecta o grafo e também é 2-conexo, pois a remoção dos vértices  $v_1$  e  $v_3$  o desconecta.

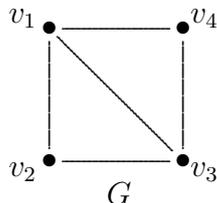


Figura 3.3: O grafo  $G$  é 2-conexo.

**Definição 3.4.** *Um grafo  $G$  é dito  $\lambda$ -aresta conexo,  $\lambda \geq 1$ , se  $\lambda(G) \geq \lambda$ .*

Resultados interessantes sobre esses parâmetros são apresentados a seguir. O primeiro deles agrupa vários resultados menores, sendo, por isso mesmo, muito utilizado [Bo01].

**Teorema 3.2.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo tal que  $|V| = n$  e  $|E| = m$ . Então*

i) *se  $m \geq n - 1$ , tem-se  $\kappa(G) \leq \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor$ ;*

ii) *se  $\delta(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ , tem-se  $\lambda(G) = \delta(G)$ ;*

iii) *se  $n \geq 2$ ,  $k$  um inteiro tal que  $1 \leq k \leq n - 1$  e  $\forall v \in V \quad d(v) \geq \left\lceil \frac{n + k - 2}{2} \right\rceil$ , tem-se que  $G$  é  $k$ -conexo;*

iv) *se  $G$  é  $k$ -conexo com  $k \geq 2$ , todo subconjunto de  $V$  com  $k$  vértices faz parte de um ciclo.*

O Teorema 3.3, que caracteriza os grafos  $k$ -conexos, aparece de diversas formas e em diversas partes da teoria. A sua prova pode ser encontrada em Berge [Be73], Harary [Ha95] e Whitney [Wh32].

**Teorema 3.3 (Whitney).** *Um grafo  $G = (V, E)$  é  $k$ -conexo se, e somente se, para todo par  $u, v \in V, u \neq v$ , existem, ao menos,  $k$  caminhos entre  $u$  e  $v$  em  $G$ .*

Considere o grafo  $G$  da Figura 3.4. Note que  $G$  é 2-conexo e existem pelo menos 2 caminhos entre quaisquer pares de vértices de  $G$ , por exemplo, os caminhos  $\{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_6\}$  e  $\{v_1v_5, v_5v_6\}$  ligam o vértice  $v_1$  ao vértice  $v_6$ .

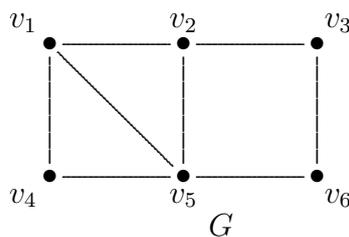


Figura 3.4: Grafo  $G$  2-conexo.

As conectividades clássicas são consideradas como simples parâmetros de grafos capazes de medir sua vulnerabilidade no pior caso, isto é, mostram a vulnerabilidade do grafo para um ataque ótimo, em que o atacante sabe exatamente quais vértices ou arestas devem ser atingidos para tornar o grafo desconexo [CK89]. Esses parâmetros não fornecem diretamente informações importantes, tais como: quais os vértices ou arestas que devem ser removidos para desconectar o grafo, ou quais são as propriedades dos subgrafos resultantes ou, ainda,

como a remoção de um vértice ou aresta interfere individualmente na degradação do grafo. Sendo assim, não são medidas suficientes para determinar se uma rede é mais (ou menos) vulnerável do que uma outra.

A Figura 3.5 mostra dois grafos conexos,  $G$  e  $H$ , de ordem 7, tamanho 9, com conectividade de vértice igual a 1 e de aresta igual a 2, mas com o número de componentes conexas diferentes após a remoção do vértice  $v$  em  $G$  e  $u$  em  $H$ .

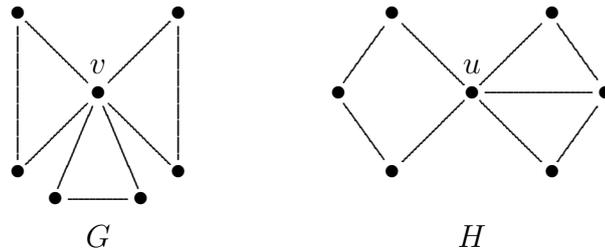


Figura 3.5: O grafo  $G$ , após a remoção de  $v$ , fica com 3 componentes conexas e  $H$ , após a remoção de  $u$ , com 2 componentes conexas.

Por outro lado, como já foi dito, as conectividades clássicas têm a vantagem de já terem sido muito estudadas e, por isso, muitos resultados estão disponíveis para grafos de muitas famílias conhecidas [AH73, Bo01, CK89]. Além disso, existem diversos algoritmos baseados em busca em profundidade capazes de estimar as conectividades de vértice e de aresta [AH73, Bo01, HRG00]. Sendo assim, alguns autores [Do89, HA73, Sm84] sugerem que tais parâmetros sejam utilizados como medidas secundárias para fornecer limites para outras medidas.

## 3.2 Quesito de Conectividade

Em geral, as redes de comunicação são projetadas com a perspectiva de minimizar o custo para satisfazer as necessidades de demanda de modo que a rede possa, na medida do possível, se manter esparsa. Os nós da rede representando os pontos a serem ligados, e as arestas, representando a via de comunicação entre os nós, são os responsáveis na geração de possíveis falhas nos serviços de comunicação. Por causa disso, os projetistas de redes utilizam redundantes vias de comunicação, fornecendo caminhos alternativos, para que a comunicação seja satisfeita, até mesmo no caso de ocorrência de falha. O grau de redundância depende de um compromisso (*trade-off*) entre o custo da rede e a importância de manter a conexão entre qualquer par de seus nós. Como a probabilidade de falhas simultâneas de dois ou mais elementos (nós ou arestas) é muito pequena, ao se planejar uma rede, em geral, assume-se que cada falha deverá ocorrer em momentos distintos.

Planejamentos de redes pouco vulneráveis constituem uma área científica conhecida por *Survivable Network Design* (SDN) e a programação matemática envolvida é baseada no conhecido Teorema de Menger, que requer a determinação do conjunto de corte de arestas de custo mínimo, sua conectividade e o número máximo de caminhos disjuntos no grafo que modela a rede. Tais assuntos são discutidos em Problemas de Fluxos em Rede, uma vasta área interdisciplinar que envolve Matemática Aplicada, Álgebra Linear, Pesquisa Operacional e Algoritmos Computacionais. Por se tratar de um assunto clássico em Otimização Combinatória, o *quesito de conectividade*, parâmetro determinado em SDN, a ser definido um pouco mais adiante, foi aqui enquadrado como uma medida clássica de vulnerabilidade.

Diz-se que uma rede é sobrevivente (*survivable network*) se ela continuar satisfazendo a demanda de comunicação mesmo que alguns de seus nós ou arestas tenham falhado.

**Definição 3.5.** O *quesito de conectividade* (*connectivity requirement*) entre dois vértices quaisquer  $i \neq j$  de um grafo  $G$ , denotado por um inteiro não-negativo  $r_{ij}$ , é o número mínimo de caminhos-disjuntos-por-arestas que ligam os dois vértices  $i$  e  $j$ . Se o grafo  $G$  é não orientado,  $r_{ij} = r_{ji}$ .

Seja  $G = (V, E)$  um grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas que modela uma rede. Essa é dita ser de baixa sobrevivência quando o máximo *quesito de conectividade* é no máximo 2, isto é,  $\max_{1 \leq i < j \leq n} r_{ij} \leq 2$ . Nesse caso, o grafo  $G$  terá no máximo conectividade de vértices também igual a dois [WGMV95].

Numa rede de computadores, por exemplo, se ambos os vértices  $i$  e  $j$  são nós de *backbone* então  $r_{ij} \geq 2$ , se um deles é um nó de acesso local,  $r_{ij} = 1$  e se um dos nós  $i$  ou  $j$  é considerado opcional para uso, como no caso das redes de Steiner, tem-se  $r_{ij} = 0$ .

**Definição 3.6.** Sejam  $G = (V, E)$  um grafo e  $S$  um subconjunto próprio e não-vazio de  $V$ . O *corte de arestas* definido por  $S$  é dado por:

$$\langle S, V - S \rangle = \{ \{i, j\} \in E / i \in S \text{ e } j \in V - S \} .$$

Formulação para o Problema de corte de uma SDN:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{\{i,j\} \in E} a_{ij} x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{\{i,j\} \in \langle S, V-S \rangle} x_{ij} \geq \max_{\{i,j\} \in \langle S, V-S \rangle} r_{ij} \quad , \quad \forall S \subset V, S \neq \emptyset$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \quad \forall \{i, j\} \in E .$$

Problemas como esse são em geral resolvidos por uma abordagem primal-dual de programação linear [WGMV95].

A Figura 3.6 mostra uma rede sobrevivente com componentes 2-conexas em que o quesito de conectividade para pares de nós quadrados  $\square$  é igual a 3; para pares de nós triângulos  $\triangle$  é 2 e para pares de nós bolinha  $\circ$  é 1.

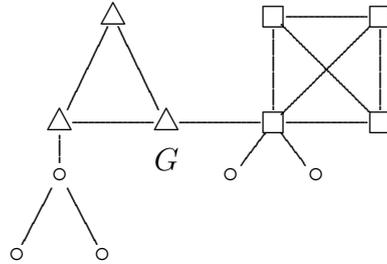


Figura 3.6: Grafo  $G$ .

Cabe considerar aqui que esse parâmetro é uma medida utilizada somente durante o processo de planejamento de redes, enquanto os demais parâmetros são utilizados para a avaliação das mesmas, conforme a sua vulnerabilidade. É lógico que uma rede bem construída deverá ser pouco vulnerável e o quesito de conectividade deverá atender bem o compromisso entre o custo da construção e/ou manutenção da rede e a sua segurança depois da rede pronta. Assim, apesar de não se tratar de uma medida de avaliação da vulnerabilidade, o quesito de conectividade foi apresentado nessa dissertação por constituir um elemento muito estudado no planejamento de redes e que, por isso mesmo, deve levar em consideração a característica de baixa vulnerabilidade.

### 3.3 Um Parâmetro Espectral - A Conectividade Algébrica

A conectividade algébrica de um grafo é outra medida de vulnerabilidade de redes, que embora não pareça ser muito utilizada em aplicações práticas, é um parâmetro clássico na área de Teoria Espectral dos Grafos que busca obter propriedades estruturais dos grafos a partir das propriedades dos autovalores das matrizes relacionadas a esses grafos, mediante os conhecimentos de Álgebra Linear. Assim, são apresentados aqui alguns conceitos dessa área, a partir da representação de um grafo por uma matriz. Por exemplo, são definidos os autovalores e o polinômio característico de um grafo, o espectro e o laplaciano de um grafo e, ainda, são estabelecidos alguns resultados sobre estes conceitos [Bi93, CDS95, CRS97].

**Definição 3.7.** *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas. Uma matriz quadrada simétrica de ordem  $n$ ,  $A(G) = [a_{ij}]$ , tal que:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E ; \\ 0, & \text{se } \{v_i, v_j\} \notin E , \end{cases}$$

*é denominada matriz de adjacência de  $G$ .*

Trata-se de uma outra forma muito vantajosa de se representar o grafo. Por exemplo, a representação de um grafo por uma matriz é um artifício muito útil para se trabalhar com o auxílio de métodos computacionais.

A Figura 3.7 mostra um grafo  $G$  com sua respectiva matriz de adjacência.



Figura 3.7: Um grafo e sua matriz de adjacência.

Como as linhas e as colunas de  $A(G)$  correspondem a uma rotulação arbitrária dos vértices e arestas, tem-se que o interesse principal deve estar sobre aquelas propriedades da matriz de adjacência que são invariantes sobre as permutações das linhas e colunas. Dentre elas estão as propriedades espectrais [Bi93]. Suponha que  $\lambda$  seja um autovalor de  $A$ . Então como  $A$  é simétrica e definida sobre  $\mathbb{R}$ . Segue-se que  $\lambda$  é sempre um número real como raiz da equação  $\det(\lambda I - A) = 0$  [Bi93].

**Definição 3.8.** *Sejam  $G$  um grafo de ordem  $n$  e  $A(G)$  sua matriz de adjacência. O polinômio na variável  $\lambda$  determinado por  $p_G(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$  é denominado polinômio característico de  $G$ , onde  $I_n$  representa a matriz identidade de ordem  $n$ .*

**Definição 3.9.** *Seja  $G$  um grafo de ordem  $n$  e  $p_G(\lambda)$  seu polinômio característico. Os valores de  $\lambda$  que são raízes de  $p_G(\lambda)$  são denominados autovalores de  $G$ .*

**Definição 3.10.** *Seja  $G$  um grafo de ordem  $n$  e  $p_G(\lambda)$  seu polinômio característico. O maior autovalor desse polinômio é denominado índice de  $G$  e é denotado por  $ind(G)$ .*

O polinômio característico do grafo  $G$  da Figura 3.7 é  $p_G(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda$ , cujos autovalores são  $0, -1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$  e  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$ . Logo, seu índice é  $ind(G) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$ .

Para a árvore  $T$  da Figura 3.8, o polinômio característico é  $p_T = \lambda^5 - 4\lambda^3 + 2\lambda$ , cujos autovalores são  $-\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ,  $-\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ,  $0$ ,  $\sqrt{2-\sqrt{2}}$  e  $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ . Assim, o índice de  $T$  é  $ind(T) = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ .

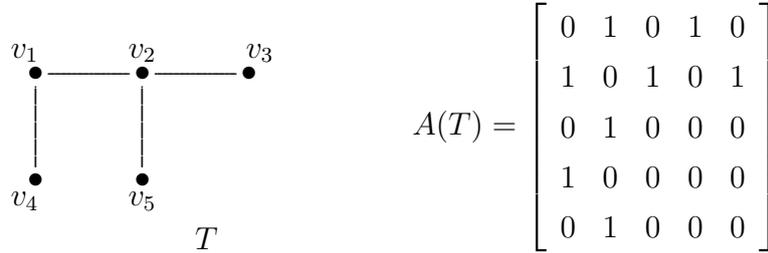


Figura 3.8: Árvore  $T$  e sua matriz de adjacência.

A Figura 3.9 mostra o grafo completo  $K_5$  e sua matriz de adjacência, cujo polinômio característico é  $p_{K_5}(\lambda) = \lambda^5 - 10\lambda^3 - 20\lambda^2 - 15\lambda - 4$  e os autovalores são  $-1, -1, -1, -1$  e  $4$ . Logo,  $ind(G) = 4$ .

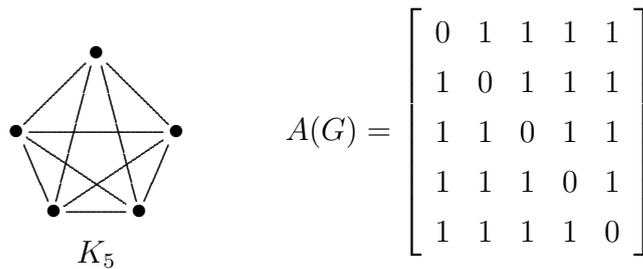


Figura 3.9: Grafo completo  $K_5$  e sua matriz de adjacência.

Da Teoria das Matrizes, sabe-se que todos os coeficientes do polinômio característico de uma matriz podem ser expressos em função dos menores principais de  $A$ . Cabe lembrar que um menor principal é o determinante de uma submatriz obtida tomando-se um subconjunto das linhas e um subconjunto das colunas, ambos de mesma cardinalidade. Isto conduz ao seguinte resultado, referente ao polinômio característico de  $G$ , cuja prova se encontra em Biggs [Bi93].

**Teorema 3.4.** *Seja  $p_G(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1}\lambda + c_n$  o polinômio característico de  $G$ . Tem-se que:*

- (i)  $c_1 = 0$ ;
- (ii)  $-c_2$  é o número de arestas de  $G$ ;
- (iii)  $-c_3$  é duas vezes o número de triângulos em  $G$ .

Para ilustrar o teorema acima, considere os grafos das Figuras 3.7, 3.8 e 3.9. Para o grafo  $G$  da Figura 3.7,  $p_G(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda$ , onde evidentemente  $c_1 = 0$  e  $-c_2 = 5$ , corresponde ao número de arestas de  $G$ . Como  $G$  tem dois triângulos,  $-c_3 = 4$ ; para a árvore  $T$  da Figura 3.8,  $p_T = \lambda^5 - 4\lambda^3 + 2\lambda$ , onde  $c_1 = 0$  e, como  $T$  tem 5 vértices, o número de arestas é 4 que corresponde ao valor de  $-c_2$  e obviamente  $-c_3 = 0$ . Finalmente, para  $K_5$  da Figura 3.9,  $p_{K_5} = \lambda^5 - 10\lambda^3 - 20\lambda^2 - 15\lambda - 4$  e vê-se que  $c_1 = 0$ ; o número de arestas é  $-c_2 = 10$  e o dobro do número de triângulos de  $K_5$  é  $-c_3 = 20$ .

**Definição 3.11.** *Seja  $G$  um grafo de ordem  $n$  e  $A(G)$  sua matriz de adjacência. O espectro de um grafo  $G$  de ordem  $n$ ,  $\text{Spec } G$ , é definido como sendo uma matriz  $2 \times s$ , onde a primeira linha é constituída pelos autovalores distintos de  $A(G)$  escritos em ordem decrescente e a segunda por suas multiplicidades algébricas. Assim, se  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{s-1} > \lambda_s$  são os autovalores distintos de  $A(G)$  e  $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_{s-1})$  e  $m(\lambda_s)$  são suas respectivas multiplicidades algébricas, então o espectro de  $G$  é*

$$\text{Spec } G = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{s-1} & \lambda_s \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \dots & m(\lambda_{s-1}) & m(\lambda_s) \end{pmatrix}.$$

A Figura 3.10 exhibe o grafo  $K_4$ , sua matriz de adjacência e seu espectro. Seu polinômio característico é  $p_{K_4}(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3$ , sendo  $\text{ind}(K_4) = 3$ .

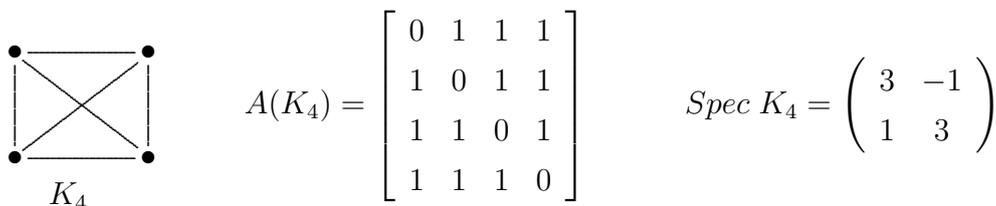


Figura 3.10: Matriz de adjacência e espectro do grafo  $K_4$ .

Em [CDS79] encontra-se uma prova para o Teorema 3.5, a seguir apresentado, que relaciona os graus dos vértices de um grafo com o seu índice.

**Teorema 3.5.** *Seja  $G$  um grafo com grau mínimo  $\delta(G)$ , grau máximo  $\Delta(G)$  e  $d(G)$  grau médio de  $G$ . Então  $\delta(G) \leq d(G) \leq \text{ind}(G) \leq \Delta(G)$ .*

Os parâmetros dados para o grafo da Figura 3.11 ilustram as desigualdades do Teorema 3.5.

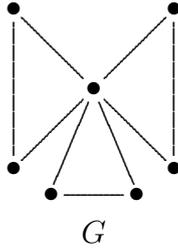


Figura 3.11: Grafo  $G$  com  $\delta(G) = 2$ ,  $d(G) = \frac{18}{7}$ ,  $ind(G) = 3$  e  $\Delta(G) = 6$ .

A Proposição 3.1, cuja prova está em [Bi93], apresenta um resultado para grafos regulares com respeito a seus autovalores.

**Proposição 3.1.** *Seja  $G$  um grafo  $k$ -regular. Então:*

- (i)  $k$  é autovalor de  $G$ ;
- (ii) se  $G$  é conexo então  $m(k) = 1$ ;
- (iii) para todos os autovalores  $\lambda$  de  $G$  tem-se  $|\lambda| \leq k$ . Logo,  $ind(G) = k$ .

Para o grafo 3-regular da Figura 3.12, o polinômio característico é  $p_G(\lambda) = \lambda^8 - 12\lambda^6 + 30\lambda^4 - 28\lambda^2 + 9$ , cujos autovalores são  $-3, -1, -1, -1, 1, 1, 1$  e  $3$ . Logo,  $ind(G) = 3$  e dado que  $G$  é conexo, sua multiplicidade é 1.

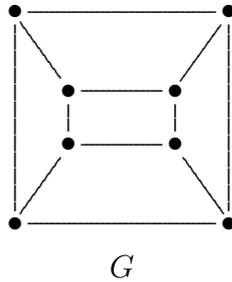


Figura 3.12: Grafo 3-regular.

Algumas famílias especiais de grafos têm seus grafos caracterizados pelos seus espectros. Por exemplo, o espectro do grafo completo  $K_n$  é dado por:

$$\begin{bmatrix} n-1 & -1 \\ 1 & n-1 \end{bmatrix}$$

e o espectro do ciclo  $C_n$  é

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \cos \frac{2\pi}{n} & \cdots & 2 \cos \frac{(n-1)\pi}{n} \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \end{bmatrix}, \text{ para } n \text{ ímpar, e}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \cos \frac{2\pi}{n} & \cdots & 2 \cos \frac{(n-2)\pi}{n} & -2 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ para } n \text{ par.}$$

A determinação do espectro de  $K_n$  e de  $C_n$  podem ser encontradas em Biggs [Bi93].

O próximo teorema fornece limites para o índice de um grafo qualquer em função de alguns parâmetros tradicionais. Sua prova se encontra em [CR90].

**Teorema 3.6.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo com  $n$  vértices,  $m$  arestas e grau máximo  $\Delta(G)$ . Então:*

1.  $ind(G) \geq \sqrt{\frac{\sum_{v \in V} d(v)^2}{n}}$  ;
2.  $ind(G) \geq \sqrt{\Delta(G)}$  ;
3.  $ind(G) \leq \sqrt{2m(1 - \frac{1}{n})}$  ;
4.  $ind(G) \leq \sqrt{2m - n + 1}$ . Essa igualdade ocorre se, e somente se,  $G$  é o grafo estrela  $K_{1, n-1}$  ou o grafo completo  $K_n$ .

O grafo da Figura 3.11 tem os seguintes parâmetros  $n = 7$ ,  $m = 9$ ,  $ind(G) = 3$ ,  $\Delta(G) = 6$  e  $\sum_{v \in V} d(v)^2 = 60$ . Pode-se constatar que  $ind(G) = 3$  é realmente superior ao máximo  $\{\sqrt{\frac{\sum_{v \in V} d(v)^2}{n}} \cong 2,93$ ;  $\sqrt{\Delta(G)} \cong 2,45\}$  e inferior ao mínimo  $\{\sqrt{2m(1 - \frac{1}{n})} \cong 3,93$ ;  $\sqrt{2m - n + 1} \cong 3,46\}$  em concordância com os itens do Teorema 3.6.

**Definição 3.12.** *Seja  $G$  um grafo de ordem  $n$ ,  $A(G)$  sua matriz de adjacência e  $D(G)$  a matriz diagonal de ordem  $n$  cujos elementos da diagonal principal são os graus dos vértices de  $G$ . O laplaciano de  $G$ , denotado por  $L(G)$ , é a matriz simétrica definida por:*

$$L(G) = D(G) - A(G) .$$

Como se pode observar o laplaciano de  $G$  não depende apenas do grafo, mas também de uma ordenação arbitrária dos seus vértices. Entretanto, todas as matrizes laplacianas distintas associadas a um mesmo grafo são semelhantes. Assim, se dois grafos  $G_1$  e  $G_2$  são isomorfos, existe uma matriz  $P$  tal que  $L(G_2) = P^t \cdot L(G_1) \cdot P$ . Conseqüentemente, os polinômios característicos associados a essas matrizes são iguais, isto é,  $p(\lambda) = \det(L(G_1) - \lambda I) = \det(L(G_2) - \lambda I)$  [Bi93, CCD90].

**Definição 3.13.** *Seja  $G$  um grafo e  $L(G)$  seu laplaciano.*

1. O polinômio característico associado à  $L(G)$ , denotado por  $p_{L(G)}(\lambda)$ , é denominado *polinômio característico do laplaciano* de  $G$ ;
2.  $\lambda$  é um autovalor do laplaciano de  $G$  se  $\lambda$  é raiz de  $p_{L(G)}$ ;
3. O espectro do laplaciano de  $G$ , denotado por  $\zeta(G)$ , é definido como sendo uma matriz linha cujos elementos são os autovalores de  $L(G)$  ordenados em ordem não-crescente. Assim, se  $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$  são os autovalores de  $L(G)$  então o espectro do laplaciano de  $G$  é dado por:

$$\zeta(G) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n).$$

Como o laplaciano de  $G$  é uma matriz real simétrica semi-positiva definida tem-se que todos os autovalores de  $L(G)$  são maiores ou iguais a zero [Me94]. Além disso, como as colunas de  $L(G)$  formam um conjunto linearmente dependente, tem-se que pelo menos um autovalor de  $L(G)$  é nulo. Logo,  $\alpha_n = 0$  e  $\alpha_i \geq 0 \forall i = 0, 1, \dots, n-1$  [Bi93].

**Definição 3.14.** *Sejam  $G$  um grafo de ordem  $n$  e  $\zeta(G) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, 0)$  o espectro do laplaciano de  $G$ . A conectividade algébrica de  $G$  é definida por  $a(G) = \alpha_{n-1}$ .*

A Proposição 3.2, cuja prova se encontra em [Ol03], relaciona o posto da matriz laplaciana de  $G$  com o número de componentes conexas.

**Proposição 3.2.** *Seja  $G$  um grafo,  $r[L(G)]$  o posto do laplaciano de  $G$  e  $n_c(G)$  o número de componentes conexas de  $G$ . Então  $r[L(G)] = n - n_c(G)$ .*

Pela Proposição 3.3, um grafo  $G$  é conexo se, e somente se,  $\alpha_{n-1} \neq 0$ . Além disso, conjectura-se que quanto mais próximo de zero está a conectividade algébrica, mais vulnerável o grafo parece ser [Ol03]. Por esta razão, Fiedler [Fi73] definiu o penúltimo autovalor de  $L(G)$  como sendo a *conectividade algébrica* de  $G$ .

**Proposição 3.3.** *Seja  $a(G)$  a conectividade algébrica de um grafo  $G$ . Então  $G$  é conexo se e somente se  $a(G) \neq 0$ .*

O próximo resultado relaciona os autovalores de um grafo  $k$ -regular conexo com os autovalores do seu laplaciano. Apesar de ser um resultado forte, sua prova é trivial e decorre apenas do fato de que  $D(G) = k \cdot I_n$ .

**Proposição 3.4.** *Seja  $G$  um grafo  $k$ -regular conexo. Então  $\lambda$  é um autovalor de  $A(G)$  se e somente se  $k - \lambda$  é um autovalor de  $L(G)$ .*

Teoremas sobre a conectividade algébrica estão disponíveis em Fiedler [Fi73], onde são apresentados diversos limites relacionados a esse parâmetro. Em Merris [Me94], encontram-se resultados mais gerais sobre o laplaciano de um grafo.

Considere o grafo  $G$  da Figura 3.13.

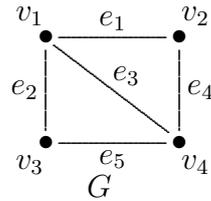


Figura 3.13: Grafo  $G$ .

A matriz diagonal  $D(G)$  armazena os graus dos vértices do grafo e a matriz do laplaciano de  $G$ ,  $L(G)$ , é determinada em função de  $D(G)$  e da matriz de adjacência  $A(G)$  do grafo.

$$D(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad L(G) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Para esse grafo, o polinômio característico é  $p_G(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda$ , cujas raízes são os autovalores de  $G$  dados por  $\lambda_1 = 2,561$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = -1$  e  $\lambda_4 = -1,5616$ . O polinômio característico do laplaciano é  $p_{L(G)}(\alpha) = \alpha^4 - 10\alpha^3 + 32\alpha^2 - 32\alpha$ , cujas raízes são  $\alpha_1 = 4$ ,  $\alpha_2 = 4$ ,  $\alpha_3 = 2$  e  $\alpha_4 = 0$ . A conectividade algébrica de  $G$  é dada então por  $a(G) = 2$ .

Valores ou expressões da conectividade algébrica para uma série de grafos conhecidos podem ser vistos em [Bi93, Fi73, GR01, Me94]. Por exemplo, sabe-se que para grafos completos  $a(K_n) = n$ . Expressões para a conectividade algébrica dos caminhos, dos ciclos e de grafos bipartidos completos também são conhecidas. As seguintes proposições fornecem esses valores, cujos cálculos se encontram em [Ol03].

**Proposição 3.5.** *Seja  $P_n$  um caminho com  $n$  vértices. Então*

$$a(P_n) = 2\left[1 - \cos \frac{\pi}{n}\right].$$

**Proposição 3.6.** Para  $n \geq 4$ , seja  $C_n$  o  $n$ -ciclo. Então

$$a(C_n) = 2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n} .$$

**Proposição 3.7.** Seja  $K_{s,p}$  o grafo bipartido completo tal que  $s \leq p$ . Então

$$a(K_{s,p}) = s .$$

A Proposição 3.8 estabelece um limite superior para a conectividade algébrica de uma árvore  $T$  em função de seu diâmetro  $d_T$ , cuja prova se encontra em [Fi73].

**Proposição 3.8.** Seja  $T$  uma árvore de diâmetro  $d_T$ . Então

$$a(T) \leq 2 \left[ 1 - \cos \frac{\pi}{d_T + 1} \right] .$$

O Teorema 3.7, cuja prova se encontra em [Ol03], relaciona o espectro de um grafo  $G$  com o espectro do seu complementar. Esse resultado foi primeiramente observado por Kel'mans [Ke65, Ke66] e é muito utilizado na determinação da conectividade algébrica de grafos em que os autovalores do laplaciano dos seus respectivos grafos complementares são conhecidos ou o contrário, como se pode ver no Corolário 3.1.

**Teorema 3.7.** Se  $\zeta(G) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, 0)$  é o espectro do laplaciano de  $G$ , então o espectro do laplaciano de  $\overline{G}$  é

$$\zeta(\overline{G}) = (n - \alpha_{n-1}, n - \alpha_{n-2}, \dots, n - \alpha_2, n - \alpha_1, 0) .$$

**Corolário 3.1.** Seja  $\overline{G}$  o grafo complementar de um grafo  $G$  de ordem  $n$  e  $\alpha_1$  o maior autovalor de  $L(G)$ . Então

$$a(\overline{G}) = n - \alpha_1 .$$

O próximo teorema diz que todo subgrafo abrangente de  $G$  tem sua conectividade algébrica limitada superiormente pela conectividade algébrica de  $G$  [Bi93, Fi73].

**Teorema 3.8.** Seja  $G$  um grafo e  $H$  um subgrafo abrangente de  $G$ . Então

$$a(H) \leq a(G) .$$

Uma extensão do Teorema 3.1 aparece no Teorema 3.9, o qual é provado em [Bi93] e que relaciona a conectividade algébrica de um grafo não-completo com sua conectividade de aresta,  $\lambda(G)$ , de vértice,  $\kappa(G)$ , o grau mínimo,  $\delta(G)$ , e ainda com o número de vértices de  $G$ . Este resultado é de grande importância. De fato, nos dias atuais, determinar a conectividade algébrica de um grafo com o auxílio computacional é uma tarefa simples para grafos limitados a uma dada ordem e isso pode ajudar a estabelecer bons limites para estimar as conectividades clássicas.

**Teorema 3.9.** *Seja  $G$  um grafo não-completo. Então*

$$a(G) \leq \kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G) \leq n - 2.$$

Em [CDS95] é apresentado um resultado que limita inferiormente a conectividade algébrica de um grafo  $G$  em função da conectividade de aresta,  $\lambda(G)$ , e de sua ordem  $n$ .

**Teorema 3.10.** *Seja  $G$  um grafo de ordem  $n$ . Então*

$$a(G) \geq 2 \lambda(G) \left[1 - \cos \frac{\pi}{n}\right].$$

Um outro limite para a conectividade algébrica é dado apenas em função do número de vértices e de arestas de  $G$ , conforme o Teorema 3.11, cuja prova se encontra em [Bi93].

**Teorema 3.11.** *Seja  $G$  um grafo qualquer com  $n$  vértices e  $m$  arestas. Então*

$$a(G) \leq \left(\frac{2m}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

O Teorema 3.12 relaciona a conectividade algébrica de um grafo com seu índice  $ind(G)$ . Essa é uma das poucas provas que aqui serão apresentadas já que não há maiores dificuldades técnicas para a sua compreensão.

**Teorema 3.12.**

*i) Se  $G$  é um grafo não-completo, então  $a(G) \leq ind(G)$ .*

*ii) Se  $G$  é um grafo conexo  $k$ -regular, então  $a(G) = ind(G) - \lambda_1$ , onde  $\lambda_1$  é o autovalor de  $G$  imediatamente inferior a  $k$ .*

**Prova:**

i) Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices tal que  $\delta(G)$  e  $d(G)$  são os seus graus mínimo e médio, respectivamente. Como  $\delta(G) \leq d(G)$ , segue dos Teoremas 3.5 e 3.9 que  $a(G) \leq ind(G)$ .

ii) Seja  $G$  um grafo conexo  $k$ -regular. Então tem-se que  $ind(G) = k$  e seu espectro é dado por:

$$Spec G = \begin{bmatrix} k & \lambda_1 & \cdots & \lambda_s \\ 1 & m_1 & \cdots & m_s \end{bmatrix},$$

onde  $k \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s$ . Logo,  $\lambda_1$  é o maior autovalor de  $A(G)$  menor que  $k$ .

Pela Proposição 3.4, tem-se que

$$\zeta(G) = (k - \lambda_s, \dots, k - \lambda_s, k - \lambda_{s-1}, \dots, k - \lambda_{s-1}, \dots, k - \lambda_1, \dots, k - \lambda_1, 0).$$

Conseqüentemente,  $a(G) = k - \lambda_1$  e, portanto,  $a(G) = ind(G) - \lambda_1$ .

□

O Teorema 3.13 a seguir estabelece um bom limite para a conectividade algébrica de um grafo em função do seu número de arestas.

**Teorema 3.13 (Belhaiza *et al.* [BAHO05]).** *Se  $G$  é um grafo conexo tal que  $G \neq K_n$  então*

$$a(G) \leq \lfloor -1 + \sqrt{1 + 2m} \rfloor.$$

Este limite é o melhor possível para  $m \geq 2$ .

# Capítulo 4

## Parâmetros Não-Convencionais de Vulnerabilidade

Devido à ineficiência dos parâmetros clássicos de conectividade para analisar aspectos relevantes sobre a vulnerabilidade de uma rede, têm aparecido, nas últimas décadas, novos parâmetros capazes de adicionar alguns dados referentes aos aspectos não contemplados pelos parâmetros clássicos como informações sobre as subredes resultantes após a desconexão ou sobre que vértices e/ou arestas seriam candidatos à remoção da rede primitiva.

Neste capítulo são definidos os seguintes parâmetros: o mínimo  $m$ -grau, a coesão, a conectividade condicional, a conectividade média, a persistência e a integridade de um grafo. Em alguns casos infere-se sobre as dificuldades de cada um deles segundo a complexidade de cálculo ou a capacidade para informar o que deles se espera.

### 4.1 Mínimo $m$ -grau

O *mínimo  $m$ -grau* é um parâmetro que fornece propriedades sobre os subgrafos resultantes após a remoção de um número de vértices ou de arestas capazes de desconectar o grafo dado. Isso é o que o diferencia de outras medidas que, em geral, só indicam o quão resistente um grafo pode ser em relação a sua desconexão.

Esta medida foi primeiramente apresentada por Boesch e Thomas [BT70] como segue:

**Definição 4.1.** O mínimo  $m$ -grau (*minimum  $m$ -degree*) de um grafo, denotado por  $\xi(m)$ , é o menor número necessário de arestas que devem ser removidas do grafo para desconectar algum subgrafo com  $m$  vértices do resto do grafo. Ou seja, o grafo é desconectado em componentes conexas, sendo que uma delas deve ter ordem  $m$ .

Na Figura 4.1 tem-se um grafo  $G$  e seus mínimos  $m$ -grau para  $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

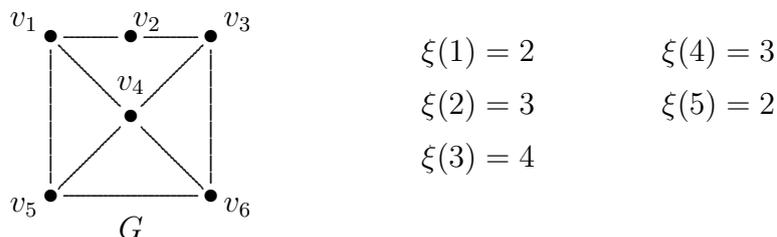


Figura 4.1: Grafo  $G$  e seus mínimos  $m$ -grau para  $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

No grafo  $G$  da Figura 4.1, note que  $\xi(1) = 2$  significa que 2 é o menor número de arestas que devem ser removidas de  $G$  para deixá-lo com uma componente conexa constituída por um único vértice, enquanto  $\xi(2) = 3$  significa que 3 é o menor número de arestas cuja remoção deixa  $G$  com uma componente conexa constituída por 2 vértices. A Tabela 4.1 descreve as arestas que devem ser retiradas para desconectar subgrafos conexos com 1 ou 2 vértices e, conseqüentemente, dá o valor de  $\xi(1)$  e  $\xi(2)$ , em cada caso.

Subgrafo	Arestas Removidas	Minimum $m$ -grau
$v_1$	$v_1v_2, v_1v_4, v_1v_5$	$\xi(1) = 2$
$v_2$	$v_1v_2, v_2v_3$	
$v_3$	$v_2v_3, v_3v_4, v_3v_6$	
$v_4$	$v_1v_4, v_3v_4, v_4v_5, v_4v_6$	
$v_5$	$v_1v_5, v_4v_5, v_5v_6$	
$v_6$	$v_3v_6, v_4v_6, v_5v_6$	
$v_1v_2$	$v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3$	$\xi(2) = 3$
$v_1v_4$	$v_1v_2, v_1v_5, v_3v_4, v_4v_5, v_4v_6$	
$v_1v_5$	$v_1v_2, v_1v_4, v_4v_5, v_5v_6$	
$v_2v_3$	$v_1v_2, v_3v_4, v_3v_6$	
$v_3v_4$	$v_1v_4, v_2v_3, v_3v_6, v_4v_5, v_4v_6$	
$v_3v_6$	$v_2v_3, v_3v_4, v_4v_6, v_5v_6$	
$v_4v_5$	$v_1v_4, v_1v_5, v_3v_4, v_4v_6, v_5v_6$	
$v_4v_6$	$v_1v_4, v_3v_4, v_3v_6, v_4v_5, v_5v_6$	
$v_5v_6$	$v_1v_5, v_3v_6, v_4v_5, v_4v_6$	

Tabela 4.1: Cálculo de  $\xi(1)$  e  $\xi(2)$  para o grafo  $G$  da Figura 4.1.

Boesch e Thomas em [BT70] apresentaram o seguinte resultado:

**Teorema 4.1.** *Seja  $G$  um grafo de ordem  $n$ . Então*

1.  $\xi(m) = \xi(n - m)$  ;
2.  $\xi(m) \geq l \cdot (\delta(G) - l + 1)$  , onde  $l = n - m$  ;
3. Para um grafo  $G$   $r$ -regular com  $n > 2$  ,  $m \geq l = n - m$  e  $r \leq \frac{n}{2}$  , o mínimo  $m$ -grau satisfaz a desigualdade:

$$r \geq \left\lfloor \frac{\delta(m)}{m} \right\rfloor + \left\lceil \frac{\delta(l)}{l} \right\rceil ,$$

onde  $\delta(m)$  é o grau mínimo da componente conexa com  $m$  vértices e  $\delta(l)$  é o grau mínimo da componente conexa com  $l$  vértices.

Com o levantamento feito para o mínimo  $m$  -grau, conclui-se que:

- é um parâmetro que não mede o quanto o grafo é resistente em relação a sua desconexão, mas informa propriedades sobre os subgrafos resultantes após a remoção de arestas. Mais especificamente, esse parâmetro informa quantas arestas no mínimo devem ser removidas do grafo para que ele tenha uma componente conexa de ordem  $m$ ,  $1 \leq m \leq n$ , e nada é assegurado sobre as demais componentes;
- embora não tenha sido encontrado nenhum artigo sobre a complexidade do mínimo  $m$ -grau, pela Definição 4.1 pode-se pensar que o seu cálculo gera um problema NP-Hard, pois depende da enumeração de todos os subconjuntos de arestas. No pior caso, isso teria complexidade  $O(2^l)$  , onde  $l$  é o número total de arestas de  $G$ .

## 4.2 Coesão

Este parâmetro foi apresentado por Akiyama *et al.* [ABEHT81] e nenhum outro artigo apresenta resultados sobre ele, a exceção do artigo de Choi e Krishna [CK89] por se tratar de um survey sobre os parâmetros de vulnerabilidade.

**Definição 4.2.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo. A coesão (cohesiveness) de um vértice  $v \in V$  é dado por  $\kappa(G) - \kappa(G - v)$ .*

Entende-se da Definição 4.2 que a coesão de um vértice do grafo é a diferença entre a conectividade de vértice do grafo original  $G$  e do subgrafo obtido removendo-se de  $G$  o vértice  $v$  e todas as arestas nele incidentes. Segue-se ainda que o limite superior da coesão de qualquer vértice é 1 [ABEHT81] e que ela está relacionada a cada vértice do grafo individualmente, enquanto a conectividade de vértice é definida para o grafo todo.

A Figura 4.2 mostra um grafo  $G$  com a coesão relativa a cada um de seus vértices. Antes de determiná-la para cada vértice é preciso calcular a conectividade de vértice de  $G$ , que, neste caso, é  $\kappa(G) = 1$ .

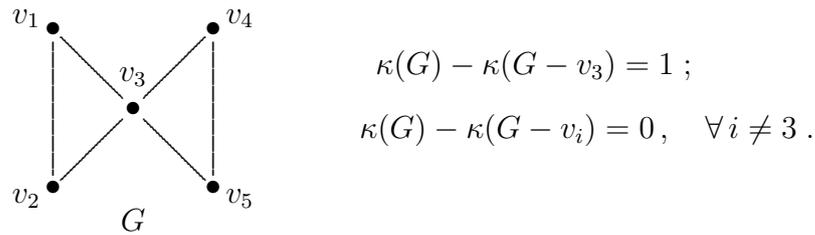


Figura 4.2: Grafo  $G$  e suas medidas de coesão referentes a cada vértice de  $G$ .

Da Definição 4.2, é possível caracterizar um vértice de  $G$  como *negativo*, *positivo* ou *neutro*. Um vértice negativo é um gargalo para a vulnerabilidade do grafo visto que a sua remoção aumenta a conectividade do grafo resultante. Pode ser provado que um grafo pode ter no máximo um vértice negativo e ainda que se  $v$  é um vértice negativo, sua vizinhança é o único conjunto de vértices de cardinalidade  $\kappa(G)$  cuja remoção desconecta o grafo [ABEHT81, CK89].

Para comprovar a afirmação acima, um exemplo é dado na Figura 4.3. O grafo  $G$  da figura tem  $\kappa(G) = 1$  e desde que  $\kappa(G - v_5) = 2$ ,  $\kappa(G) - \kappa(G - v_5) = -1$ . Logo,  $v_5$  é um vértice negativo e o único subconjunto de vértices que desconecta o grafo com cardinalidade igual a conectividade de vértice  $\kappa(G) = 1$  é o subconjunto  $S = \{v_4\}$ .

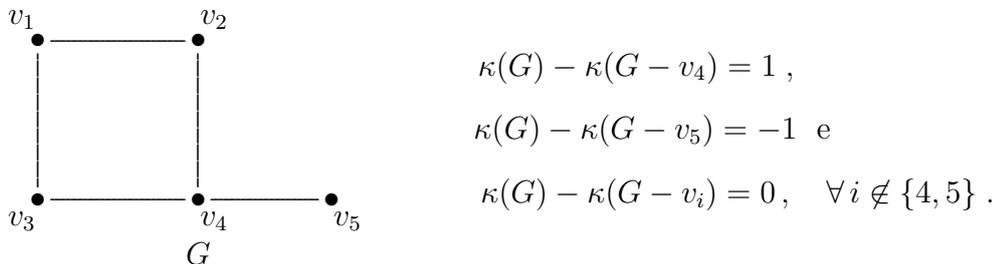


Figura 4.3: Grafo  $G$  e suas medidas de coesão referentes a cada vértice de  $G$ .

Ao ser retirado o vértice negativo  $v$  de  $G$ , o grafo resultante  $G - v$  pode ter outro vértice negativo e, assim sucessivamente. Desta forma, uma seqüência de vértices mais sensíveis à remoção para desconexão do grafo pode ser gerada. Portanto, a coesão pode ser considerada

como uma medida capaz de exibir uma seqüência de vértices que devem exigir maior vigilância por parte dos administradores da rede para que o grafo que a modela não se rompa.

Uma vantagem da coesão é que ela pode ser calculada diretamente a partir da conectividade de vértices e, logo, os algoritmos usados para determiná-la podem ser utilizados no cálculo da coesão dos vértices. Assim, a complexidade do seu cálculo é polinomial, semelhante à da conectividade de vértice. No entanto, é estranho que essa medida tenha sido tão pouco estudada até agora.

### 4.3 Conectividade Condicional

A *conectividade condicional*, ou *P-conectividade*, foi apresentada por Harary [Ha83] e parece ser uma medida melhor do que o *mínimo m-grau* porque é capaz de impor restrições às componentes conexas resultantes após a desconexão do grafo.

**Definição 4.3.** *Dado um grafo  $G$  e uma propriedade  $P$  relativa a  $G$ , a conectividade condicional (conditional connectivity) ou P-conectividade (P-connectivity),  $\kappa(G : P)$ , é o menor número de vértices que deve ser removido do grafo de modo que:*

- (a) o grafo seja desconectado;
- (b) toda componente conexa resultante atenda a propriedade  $P$ .

Analogamente, pode-se definir a *P-conectividade de aresta*, removendo-se do grafo arestas ao invés de vértices.

Na Figura 4.4, a conectividade condicional de  $G$  relativa à propriedade  $P$ : “*toda componente conexa resultante é isomorfa a um grafo completo*” é apresentada. A remoção do vértice  $v_3$  faz com que o grafo resultante tenha duas componentes conexas, uma isomorfa a  $K_2$  e a outra a  $K_4$ .

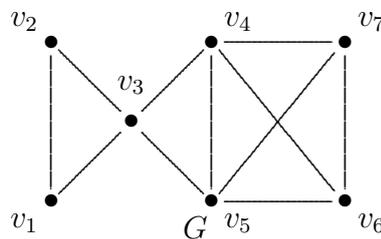


Figura 4.4: Grafo  $G$  com  $\kappa(G : P) = 1$ , para a propriedade  $P$  assim definida: “*toda componente conexa resultante é isomorfa a um grafo completo*”.

Nota-se que tanto a *conectividade de vértice*, quanto o *mínimo m-grau* são casos particulares da *conectividade condicional*. De fato, se a propriedade  $P$  for vazia, nada está se exigindo

em relação às componentes de  $G$ , então a conectividade de vértice é um caso particular da conectividade condicional; mas, se  $P$  for “uma das componente conexa tem ordem  $m$ ”, então o mínimo  $m$ -grau é que será um caso particular da conectividade condicional. Assim, essa medida é mais abrangente que as outras e pode ser mais interessante na caracterização da vulnerabilidade de um grafo.

A desvantagem da conectividade condicional é que se desconhece qualquer algoritmo computacional eficiente para sua determinação quando  $P$  é uma propriedade arbitrária para  $G$ .

A *conectividade geral* (*general connectivity*), apresentada também por Harary [Ha84] é mais um parâmetro de vulnerabilidade relacionado com a conectividade condicional e, por conseguinte, com a conectividade de vértice. Seja  $G$  um grafo com uma dada propriedade  $P$  e seja  $Y \neq \emptyset$  um subconjunto de  $V$  ou de  $E$ . A conectividade geral de  $G$ ,  $\kappa(G, Y : P)$ , é o menor número de vértices ou arestas cuja remoção faz com que  $G - Y$  não satisfaça mais  $P$ .

Seja “o grafo é conexo” a propriedade  $P$  relativa ao grafo da Figura 4.5. Tem-se que  $\kappa(G, Y : P) = 2$ , quando  $Y = \{v_1, v_3\}$ .

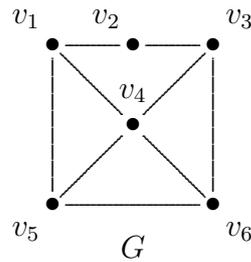


Figura 4.5: Grafo  $G$  cuja conectividade geral é  $\kappa(G, Y : P) = 2$ .

Note que para o grafo da Figura 4.5 e para a propriedade  $P$  citada acima, a conectividade geral é igual a conectividade de vértice. Porém, existem outras propriedades  $P$  para as quais  $\kappa(G) \neq \kappa(G, Y : P)$ . No grafo  $G$  da Figura 4.6,  $\kappa(G) = 2$ , porque a remoção dos vértices  $v_2$  e  $v_5$  desconecta  $G$  e não é possível desconectá-lo com a remoção de um único vértice. No entanto, ao ser removido o vértice  $v_3$  de  $G$  tem-se  $\kappa(G, Y : P) = 1$  se  $P$  for definido como: “o grafo não é isomorfo a um grafo completo”.

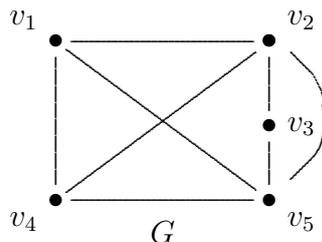


Figura 4.6: Grafo  $G$  com  $\kappa(G) = 2$  e  $\kappa(G, Y : P) = 1$ .

Com o que foi levantado sobre a conectividade condicional, é possível concluir que:

- trata-se de um parâmetro que tem a conectividade de vértice, a de aresta e o mínimo grau como casos particulares, sendo assim é um parâmetro mais abrangente e mais interessante na caracterização da vulnerabilidade de um grafo;
- no entanto, é impossível determinar um algoritmo computacional eficiente quando  $P$  é uma propriedade arbitrária de  $G$ .

## 4.4 Conectividade Média

Apresentada por Tainiter [Ta75, Ta76], a conectividade média é um parâmetro cuja natureza é diferente das medidas anteriormente estudadas, que, em geral, servem para avaliar a conectividade no pior caso. A conectividade média informa quantas ligações, em média, o grafo tem a mais do que o necessário para ser conexo, ou seja, é um parâmetro que em média determina o número de arestas excedentes para que o grafo seja conexo.

**Definição 4.4.** *Sejam  $n$  e  $m$  os respectivos números de vértices e de arestas de um grafo conexo  $G$  e seja  $S(G)$  o conjunto de todas as seqüências ordenadas das  $m$  arestas. Para cada seqüência  $s \in S(G)$ , retire do grafo todas as arestas e devolva-as uma a uma na ordem especificada pela seqüência  $s$ . Se  $\xi(s)$  é a posição da aresta na seqüência cuja adição torna o grafo novamente conexo, então a conectividade média de  $G$  é dada por:*

$$\mathcal{M}(G) = m - \frac{1}{m!} \sum_{s \in S(G)} \xi(s).$$

Considere o grafo  $G$  da Figura 4.7, a conectividade média de  $G$  é obtida segundo as regras da Definição 4.4 descritas a seguir.

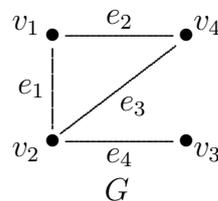


Figura 4.7: Grafo  $G$  com conectividade média  $\mathcal{M}(G) = 0,75$ .

Primeiro, determinam-se todas as seqüências ordenadas distintas das arestas de  $G$ . Essas são ao todo  $m! = 4! = 24$ .

$s_1 = e_1, e_2, e_3, e_4$	$s_2 = e_1, e_2, e_4, e_3$	$s_3 = e_1, e_3, e_2, e_4$	$s_4 = e_1, e_3, e_4, e_2$
$s_5 = e_1, e_4, e_2, e_3$	$s_6 = e_1, e_4, e_3, e_2$	$s_7 = e_2, e_1, e_3, e_4$	$s_8 = e_2, e_1, e_4, e_3$
$s_9 = e_2, e_3, e_1, e_4$	$s_{10} = e_2, e_3, e_4, e_1$	$s_{11} = e_2, e_4, e_1, e_3$	$s_{12} = e_2, e_4, e_3, e_1$
$s_{13} = e_3, e_1, e_2, e_4$	$s_{14} = e_3, e_1, e_4, e_2$	$s_{15} = e_3, e_2, e_1, e_4$	$s_{16} = e_3, e_2, e_4, e_1$
$s_{17} = e_3, e_4, e_1, e_2$	$s_{18} = e_3, e_4, e_2, e_1$	$s_{19} = e_4, e_1, e_2, e_3$	$s_{20} = e_4, e_1, e_3, e_2$
$s_{21} = e_4, e_2, e_1, e_3$	$s_{22} = e_4, e_2, e_3, e_1$	$s_{23} = e_4, e_3, e_1, e_2$	$s_{24} = e_4, e_3, e_2, e_1$

Segundo, calcula-se o valor de cada índice  $\xi(s_i)$  para  $i = 1, 2, \dots, 24$  de modo a se ter:

$\xi(s_1) = 4$	$\xi(s_2) = 3$	$\xi(s_3) = 4$	$\xi(s_4) = 3$	$\xi(s_5) = 3$
$\xi(s_6) = 3$	$\xi(s_7) = 4$	$\xi(s_8) = 3$	$\xi(s_9) = 4$	$\xi(s_{10}) = 3$
$\xi(s_{11}) = 3$	$\xi(s_{12}) = 3$	$\xi(s_{13}) = 4$	$\xi(s_{14}) = 3$	$\xi(s_{15}) = 4$
$\xi(s_{16}) = 3$	$\xi(s_{17}) = 3$	$\xi(s_{18}) = 3$	$\xi(s_{19}) = 3$	$\xi(s_{20}) = 3$
$\xi(s_{21}) = 3$	$\xi(s_{22}) = 3$	$\xi(s_{23}) = 3$	$\xi(s_{24}) = 3$	

Finalmente, aplica-se a conectividade média de  $G$ , dada pela Definição 4.4:

$$\mathcal{M}(G) = 4 - \frac{1}{4!} \sum_{s_i \in \mathcal{S}(G)} \xi(s_i) = 4 - \frac{1}{24} \cdot 78 = 0,75.$$

Da Definição 4.4,  $\xi(s_i)$  indica o número de arestas necessárias para tornar o grafo conexo, utilizando-se das  $m!$  seqüências possíveis. Assim, a expressão  $\frac{\sum_{s_i \in \mathcal{S}(G)} \xi(s_i)}{m!}$  determina a quantidade média de arestas necessárias para tornar o grafo conexo. Logo,  $\mathcal{M}(G) = m - \frac{1}{m!} \sum_{s_i \in \mathcal{S}(G)} \xi(s_i)$  informa o número médio de ligações que o grafo tem a mais do que seria necessário para a garantia da conexidade. Intuitivamente,  $\mathcal{M}(G)$  informa o número médio de ligações excedentes.

É trivial que para qualquer árvore  $T$  se tenha  $\mathcal{M}(T) = 0$ .

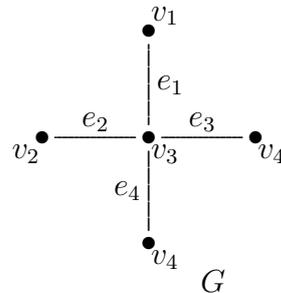


Figura 4.8: Qualquer árvore  $T$  tem conectividade média igual a zero.

Considere a árvore  $T$  da Figura 4.8. Aplicando-se o mesmo procedimento feito para o grafo  $G$  da Figura 4.7, chega-se as seqüências:

$$\begin{array}{llll}
s_1 = e_1, e_2, e_3, e_4 & s_2 = e_1, e_2, e_4, e_3 & s_3 = e_1, e_3, e_2, e_4 & s_4 = e_1, e_3, e_4, e_2 \\
s_5 = e_1, e_4, e_2, e_3 & s_6 = e_1, e_4, e_3, e_2 & s_7 = e_2, e_1, e_3, e_4 & s_8 = e_2, e_1, e_4, e_3 \\
s_9 = e_2, e_3, e_1, e_4 & s_{10} = e_2, e_3, e_4, e_1 & s_{11} = e_2, e_4, e_1, e_3 & s_{12} = e_2, e_4, e_3, e_1 \\
s_{13} = e_3, e_1, e_2, e_4 & s_{14} = e_3, e_1, e_4, e_2 & s_{15} = e_3, e_2, e_1, e_4 & s_{16} = e_3, e_2, e_4, e_1 \\
s_{17} = e_3, e_4, e_1, e_2 & s_{18} = e_3, e_4, e_2, e_1 & s_{19} = e_4, e_1, e_2, e_3 & s_{20} = e_4, e_1, e_3, e_2 \\
s_{21} = e_4, e_2, e_1, e_3 & s_{22} = e_4, e_2, e_3, e_1 & s_{23} = e_4, e_3, e_1, e_2 & s_{24} = e_4, e_3, e_2, e_1 ,
\end{array}$$

e aos seguintes valores para os índices  $\xi(s_i)$ :

$$\begin{array}{lllll}
\xi(s_1) = 4 & \xi(s_2) = 4 & \xi(s_3) = 4 & \xi(s_4) = 4 & \xi(s_5) = 4 \\
\xi(s_6) = 4 & \xi(s_7) = 4 & \xi(s_8) = 4 & \xi(s_9) = 4 & \xi(s_{10}) = 4 \\
\xi(s_{11}) = 4 & \xi(s_{12}) = 4 & \xi(s_{13}) = 4 & \xi(s_{14}) = 4 & \xi(s_{15}) = 4 \\
\xi(s_{16}) = 4 & \xi(s_{17}) = 4 & \xi(s_{18}) = 4 & \xi(s_{19}) = 4 & \xi(s_{20}) = 4 \\
\xi(s_{21}) = 4 & \xi(s_{22}) = 4 & \xi(s_{23}) = 4 & \xi(s_{24}) = 4 .
\end{array}$$

Finalmente, usando a fórmula da Definição 4.4, obtém-se o valor nulo especificado para  $\mathcal{M}(T)$ :

$$\mathcal{M}(T) = 4 - \frac{1}{4!} \sum_{s_i \in S(T)} \xi(s_i) = 4 - \frac{1}{24} \cdot 96 = 0 .$$

Os três resultados a seguir apresentados são devidos a Tainiter [Ta75, Ta76]. O primeiro diz que a conectividade média de um subgrafo abrangente de  $G$  é no máximo igual a de  $G$ ; o segundo apresenta uma relação que envolve a diferença entre as conectividades médias de  $G$  e  $G'$  quando  $G'$  é um grafo obtido de  $G$  por acrescentar a  $G$  uma estrela; finalmente, o terceiro apresenta uma relação entre a conectividade média, a conectividade de arestas, a ordem e o tamanho de  $G$ .

**Teorema 4.2.** *Se um grafo  $H$  é um subgrafo abrangente do grafo  $G$ , então  $\mathcal{M}(H) \leq \mathcal{M}(G)$ .*

**Teorema 4.3.** *Sejam  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas e  $G'$  um grafo obtido de  $G$  por adicionar a ele um novo vértice com  $h$  arestas incidentes a este vértice. Seja  $\mathcal{M}(G, k)$  o número de seqüências de  $G$  para as quais  $\xi(s) = k$ . Então a seguinte desigualdade é satisfeita:*

$$\mathcal{M}(G') - \mathcal{M}(G) \geq \frac{\mathcal{M}(G) + 1}{m + 1} - \frac{1}{h + 1} \sum_{k=n-1}^m \mathcal{M}(G, k) \frac{(h + m - k + 1)!}{(m - k)! (m + h)!}$$

**Teorema 4.4.** *Seja  $G$  um grafo. Então  $\lambda(G) - 1 \leq \mathcal{M}(G) \leq m - n + 1$ .*

Com o levantamento feito sobre a conectividade média, é possível concluir que:

- trata-se de um parâmetro que informa o número médio de ligações que o grafo tem a mais do que o necessário para sua conexidade, ou seja, é um parâmetro que em média determina o número de arestas excedentes para que o grafo seja conexo;
- embora não tenha sido encontrado uma referência que determine a complexidade computacional, pela Definição 4.4 é possível imaginar que ela define um problema seja NP-Hard, visto que depende da enumeração de todos os subconjuntos de arestas.

## 4.5 Persistência

A persistência é uma medida de vulnerabilidade baseada no conceito de diâmetro de um grafo e foi apresentada por Boesch, Harary e Kabell [BHK81].

**Definição 4.5.** *A persistência (*persistence*) ou vulnerabilidade diametral (*diameter vulnerability*) de um grafo  $G$ ,  $\rho(G)$ , é o menor número de vértices que se deve remover de  $G$  para que o grafo resultante tenha diâmetro maior que o de  $G$ .*

Nas Figuras 4.9 e 4.10 tem-se as respectivas persistências dos grafos  $G$  e  $H$ . Observe que ambos os grafos  $G$  e  $H$  têm diâmetros iguais a 3. Em  $G$ , ao ser removido um vértice qualquer, o grafo resultante não tem diâmetro maior, no entanto, a remoção dos vértices  $v_3$  e  $v_5$  fazem com que o grafo resultante  $G - \{v_3, v_5\}$  tenha diâmetro 4. Logo,  $\rho(G) = 2$ . No grafo  $H$ , se o vértice  $u_4$  for removido, o grafo desconexo  $H - \{u_4\}$  tem diâmetro  $+\infty$ . Daí,  $\rho(H) = 1$ .

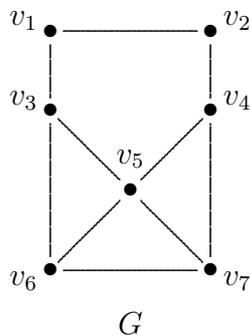


Figura 4.9:  $\rho(G) = 2$ .

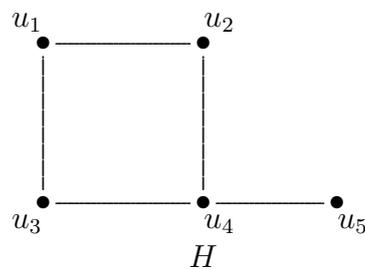


Figura 4.10:  $\rho(H) = 1$ .

Analogamente, pode-se definir a noção de *persistência de aresta*.

Pode-se concluir do que foi apresentado que a persistência é uma medida que parece ser útil a problemas práticos de redes de comunicação e transmissão de dados quando é necessário estimar quanto tempo a mais seria preciso para que uma mensagem chegue a seu destino, caso houvesse a remoção de vértices ou arestas do grafo.

## 4.6 Integridade

Outro parâmetro que mede a vulnerabilidade de redes é a *integridade* de um grafo. Esta medida foi apresentada por Barefoot *et al.* [BES87a] e muitos dos resultados existentes aparecem neste artigo. Em sua tese de doutorado, Goddard [Go89] demonstrou uma série de outros resultados que levou Bagga *et al.* [BBGLP92] a apresentarem um survey sobre esse assunto.

Se uma rede é modelada por um grafo que pode ser desconectado pela remoção de poucos vértices, pode-se pensar que a rede é altamente vulnerável. Esta destruição poderia resultar em que muitos dos seus elementos não pudessem se comunicar entre si. Para redes que modelem a competição de mercado, por exemplo, pode ser desejável que tanto o número de elementos que falham, quanto a ordem da maior componente conexa da rede após a falha sejam simultaneamente pequenos. Este fato é que pode ter motivado Barefoot *et al.* em [BES87a] a definir a integridade de um grafo. Tal parâmetro minimiza a soma tomada pela cardinalidade de cada subconjunto de vértices removido de  $G$  com a cardinalidade da maior componente conexa resultante.

**Definição 4.6.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo. A integridade de  $G$  é definida por*

$$I(G) = \min_{X \subset V} \{|X| + m(G - X)\},$$

onde  $m(G - X)$  denota a ordem da maior componente conexa do grafo  $G - X$ .

No grafo da Figura 4.11, para  $X = \{v_3\}$  tem-se  $m(G - X) = 2$ . Como  $|X| + m(G - X) = 3$  e  $\nexists X' \subset V, X' \neq X$ , tal que  $|X'| + m(G - X') < 3$ , então  $I(G) = 3$ .

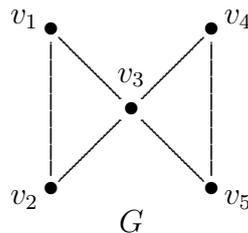


Figura 4.11: Grafo  $G$  com integridade  $I(G) = 3$ .

Apesar da motivação deste conceito ser a destruição do grafo, não é exigido que o grafo resultante após a remoção do conjunto de vértices seja desconexo [BBGLP92].

O Teorema 4.5 é uma consequência imediata da Definição 4.6 e o Teorema 4.6 fornece a integridade para grafos de algumas famílias conhecidas [BES87a, BES87b].

**Teorema 4.5 (Barefoot *et al.* [BES87a]).**

- i) Se  $G$  é um grafo de ordem  $n$ , então  $1 \leq I(G) \leq n$ .
- ii) Se  $H$  é um subgrafo de  $G$  então  $I(H) \leq I(G)$ .

**Teorema 4.6.** *As integridades dos grafos completos e seus respectivos grafos complementares, das estrelas, dos caminhos, dos ciclos e dos bipartidos completos são conhecidas. Tem-se então que:*

- a)  $I(K_n) = n$ ;
- b)  $I(\overline{K_n}) = 1$ ;
- c)  $I(K_{1,s}) = 2$ ;
- d)  $I(P_n) = \lceil 2\sqrt{n+1} \rceil - 2$ ;
- e)  $I(C_n) = \lceil 2\sqrt{n} \rceil - 1$ ;
- f)  $I(K_{s,p}) = 1 + \min\{s, p\}$ .

Na Figura 4.12, tem-se  $I(C_5) = 4$  e, na Figura 4.13, tem-se  $I(K_{4,2}) = 3$ . De fato, tome  $X = \{v_2, v_5\}$  e  $X = \{u_{21}, u_{22}\}$ , respectivamente, e note que em ambos os casos  $X$  minimiza a soma  $|X| + m(G - X)$ .

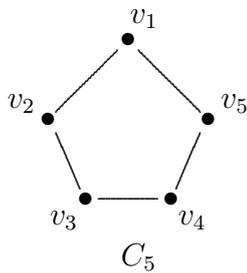


Figura 4.12:  $I(C_5) = 4$ .

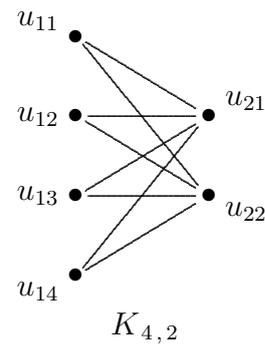


Figura 4.13:  $I(K_{4,2}) = 3$ .

O Teorema 4.7 caracteriza alguns grafos a partir de suas respectivas integridades [GS90a]. A demonstração de todos os itens é trivial à exceção do item d).

**Teorema 4.7.** *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- a)  $I(G) = 1$  se e somente se  $G \approx \overline{K_n}$ ;
- b)  $I(G) = 2$  se e somente se todas as componentes não-triviais de  $G$  são isomorfas a  $K_2$  ou a única componente não-trivial é isomorfa ao grafo estrela;
- c)  $I(G) = n$  se e somente se  $G$  é completo;
- d)  $I(G) = n - 1$  se e somente se  $G$  é um grafo não-completo com  $g(\overline{G}) \geq 5$ .

Tome  $G$  como o grafo do centro da Figura 4.14. Seu complementar tem cintura  $g(\overline{G}) = 5$ . Pelo item d) do Teorema 4.7,  $I(G) = 5$ . De fato, usando a Definição 4.6, tome  $X = \{v_3, v_4\}$  para que  $m(G - X) = 3$ , confirmando assim que  $I(G) = 5$ .

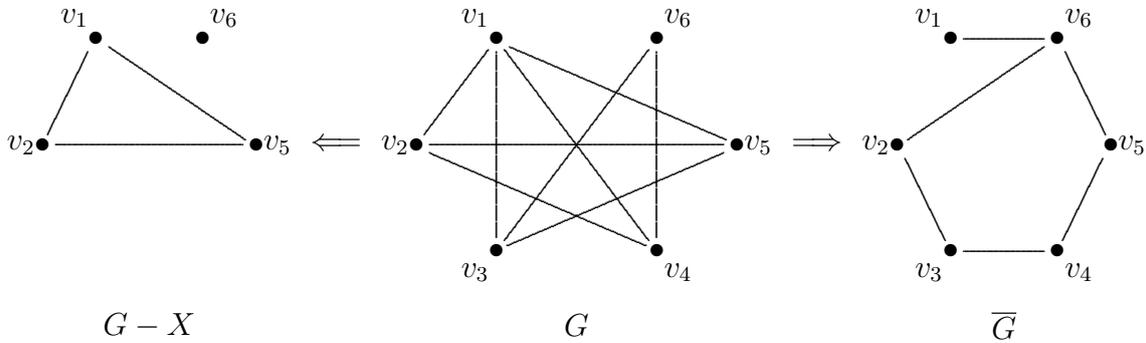


Figura 4.14: Grafo  $G$ , seu complementar  $\overline{G}$  e  $G - X$ .

Os dois resultados seguintes são devidos a Goddard e Swart [GS90a, GS90b]. O Teorema 4.8 estabelece limites para a integridade de um grafo  $G$  em função de diversos parâmetros como o grau mínimo  $\delta(G)$ , a conectividade de vértices  $\kappa(G)$ , o número de independência  $\alpha(G)$ , o número de recobrimento  $\beta(G)$ , o número cromático  $\chi(G)$  ou ainda a combinação de alguns deles. Esses limites são os melhores possíveis, já que existem grafos que os satisfazem como afirma o Teorema 4.9.

**Teorema 4.8.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo de ordem  $n$ . Então*

- a)  $I(G) \leq \beta(G) + 1$ ;
- b)  $I(G) \geq \delta(G) + 1$ ;
- c)  $I(G) \geq \min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \max\{d(v_i), i - 1\}$ , onde os graus de  $G$  são  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ ;
- d)  $I(G) \geq \chi(G)$  e, finalmente,
- e)  $I(G) \geq \frac{n - \kappa(G)}{\alpha(G) + \kappa(G)}$ .

**Teorema 4.9.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo de ordem  $n$ . Então*

- a)  $I(G) = \kappa(G) + 1$  se e somente se  $\kappa(G) = \beta(G)$ ;
- b)  $I(G) = \beta(G) + 1$  se e somente se  $G$  não contém  $2K_2$  como um subgrafo induzido;
- c)  $I(G) = \delta(G) + 1$  se e somente se  $G \approx rK_p$  ou se existe um grafo  $F$  tal que  $G \approx rK_p + F$  e  $\delta(F) \geq n - (2r - 1)p - 1$ .

O grafo  $G$  da Figura 4.15 é isomorfo a  $2K_3$ , satisfazendo o item c) do Teorema 4.9; logo, como  $\delta(G) = 2$  tem-se que  $I(G) = 3$ .

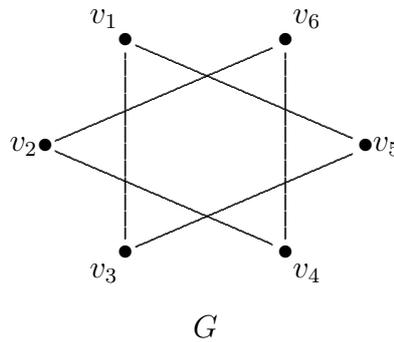


Figura 4.15: Grafo  $G \approx 2K_3$  com  $I(G) = 3$ .

Os próximos resultados limitam a soma e produto da integridade de um grafo com relação ao seu complementar [NG56].

**Teorema 4.10 (Bagga et al. [BBGLP92]).** *Seja  $G$  um grafo de ordem  $n$ . Então*

- a)  $I(G) + I(\overline{G}) \geq n + 1$ ;
- b)  $I(G) \cdot I(\overline{G}) \geq n$ .

As desigualdades do Teorema 4.10 são as melhores possíveis, visto que a igualdade em a) é obtida nos grafos bipartidos completos ou no grafo  $K_{2,4} - e$ , já a igualdade em b) é obtida quando  $G$  ou  $\overline{G}$  são grafos completos.

Os melhores limites superiores existentes são dados em termos dos *números de Ramsey*  $R(i, j)$ , mas poucos desses números são conhecidos.

A complexidade computacional do problema de determinar se a integridade de um grafo é menor ou igual a um inteiro  $k$ ,  $I(G) \leq k$ , é NP-Completo [CEF87]. No entanto, Fellows e Stueckle [FS89] mostraram que para dados valores de  $k$ , o problema de decisão é de ordem  $O(n^2)$ . Se o grafo  $G$  é uma árvore, Bagga et al. [BBLPS88] mostraram que o problema pode ser resolvido em tempo  $O(n^3)$ .

A integridade de aresta é definida de maneira análoga a de vértices.

**Definição 4.7.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo e  $S \subset E$ . A integridade de aresta de um grafo  $G$  é definida por*

$$I'(G) = \min_{S \subset E} \{|S| + m(G - S)\},$$

onde  $m(G - S)$  denota a ordem da maior componente conexa do grafo  $G - S$ .

No grafo  $G = (V, E)$  da Figura 4.16, para  $S = \{v_3v_4, v_3v_5\}$  tem-se  $m(G - S) = 3$ . Como  $|S| + m(G - S) = 5$  e  $\nexists S' \subset E, S' \neq S$ , tal que  $|S'| + m(G - S') < 5$ , da Definição 4.7,  $I'(G) = 5$ .

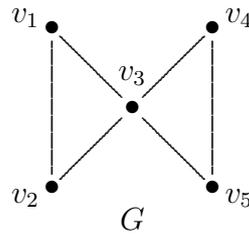


Figura 4.16: Grafo  $G$  com integridade de aresta  $I'(G) = 5$ .

A Definição 4.7 pode parecer questionável como uma medida de vulnerabilidade porque envolve a soma do número de arestas que são removidas do grafo com a ordem da maior componente conexa resultante. De qualquer modo, esta definição conduz a alguns resultados como os apresentados por Barefoot *et al.* [BES87a] e que seguem abaixo. O primeiro deles compara a integridade de aresta com a de vértices e com parâmetros mais elementares, tais como número de vértices e o grau máximo de  $G$ .

**Teorema 4.11 (Barefoot *et al.* [BES87a]).** *Se  $G$  é um grafo não-trivial de ordem  $n$  então*

- a)  $2 \leq I(G) \leq I'(G) \leq n$ ;
- b)  $I'(G) \geq \Delta(G) + 1$ ;
- c) se  $G$  é conexo,  $I'(G) \geq \lceil 2\sqrt{n} \rceil - 1$ .

Equivalentemente ao Teorema 4.6, o Teorema 4.12 fornece a integridade de arestas para os grafos de algumas famílias conhecidas [BBLP94].

**Teorema 4.12.** *Se  $G$  é um grafo completo ou seu complementar, se é o grafo estrela, ou o caminho, ou o ciclo, ou ainda um grafo bipartido completo, então sua integridade é assim conhecido:*

- a)  $I'(K_n) = n$ ;
- b)  $I'(\overline{K_n}) = 1$ ;
- c)  $I'(K_{1,s}) = s + 1$ ;
- d)  $I'(P_n) = \lceil 2\sqrt{n} \rceil - 1$ ;
- e)  $I'(C_n) = \lceil 2\sqrt{n} \rceil$  para  $n \geq 4$  e
- f)  $I'(K_{s,p}) = s + p$ .

O Teorema 4.13 limita inferiormente a integridade de aresta de um grafo em função da sua conectividade de aresta e da sua ordem, enquanto o Teorema 4.14 apresenta um resultado para a integridade de aresta [BBLP94], semelhante ao Teorema 4.10 para a integridade de vértice.

**Teorema 4.13 (Bagga *et al.* [BBLP94]).** *Seja  $G$  um grafo de ordem  $n$  tal que  $\lambda(G) \geq 2$ . Então*

$$I'(G) \geq \min\{\lceil \sqrt{2n\lambda(G)} \rceil, n\}.$$

No grafo  $G = (V, E)$  da Figura 4.17, se tomar  $S = \emptyset$  tem-se  $m(G - S) = 4$ . Assim, como  $|S| + m(G - S) = 4$  e  $\nexists S' \subset E, S' \neq S$ , tal que  $|S'| + m(G - S') < 4$ , então, pela Definição 4.7, tem-se que  $I'(G) = 4$ . Como  $\lambda(G) = 2$ , segue que  $\lceil \sqrt{2n\lambda(G)} \rceil = \lceil \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 2} \rceil = \lceil \sqrt{16} \rceil = 4$ . Portanto, está verificado o Teorema 4.13.

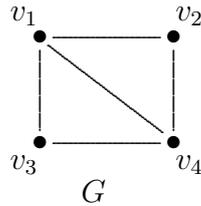


Figura 4.17: Grafo  $G$  com  $I'(G) = 4$ .

**Teorema 4.14.** *Seja  $G$  um grafo de ordem  $n$ . Então*

- a)  $n + 1 \leq I'(G) + I'(\overline{G}) \leq 2n$ ;
- b)  $n \leq I'(G) \cdot I'(\overline{G}) \leq n^2$ .

Determinar computacionalmente a integridade de aresta é um problema NP-Completo, [CEF87, FS89], mas para algumas famílias de grafos como as árvores, trata-se de problema

polinomial [BBLPS88], o que tem motivado a pesquisadores estudarem o comportamento da integridade nas árvores [BBLPS88, BES87b]. O Teorema 4.15 estabelece limites para a integridade de aresta das árvores de acordo com o grau máximo.

**Teorema 4.15 (Bagga *et al.* [BBLP94]).** *Seja  $T$  uma árvore de ordem  $n$  e  $\Delta(T)$  o seu grau máximo. Tem-se que*

a) se  $\Delta(T) \geq \frac{n}{2}$ , então  $I'(T) = \Delta(T) + 1$ ;

b) se  $\Delta(T) < \frac{n}{2}$ , então  $I'(T) \leq \frac{n+3}{2}$ .

Ao se tomar  $S = \{v_2v_3\}$  na árvore  $T = (V, E)$  da Figura 4.18, obtém-se  $m(G - S) = 3$ . Como  $|S| + m(G - S) = 4$  e  $\nexists S' \subset E, S' \neq S$ , tal que  $|S'| + m(G - S') < 4$ , da Definição 4.7, chega-se a  $I'(G) = 4$ .

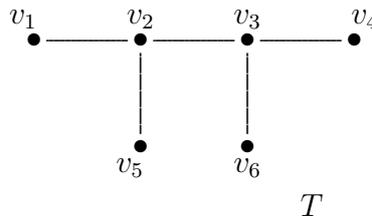


Figura 4.18: Árvore  $T$  com  $I'(T) = 4$ .

Do levantamento feito sobre as integridades de vértice e de arestas, foi possível concluir que:

- os dois tipos de integridade devem ser utilizados quando se deseja que o número de elementos removidos e a ordem da maior componente conexa resultante sejam quantidades simultaneamente pequenas [BBGLP92, BBLP94, CEF87];
- ambas as integridades definem problemas NP-Completo [CEF87], embora para alguns casos, como o das árvores, sejam problemas polinomiais [FS89];
- bons limites superiores para a integridade de vértices são difíceis de serem obtidos; os mais interessantes são dados em termos dos números de Ramsey  $R(i, j)$  que infelizmente são difíceis de determinar para a maioria dos grafos e dos valores de  $i$  e  $j$ .

# Capítulo 5

## Vulnerabilidade e Hamiltonicidade

Alguns parâmetros de grafos não-convencionais relativos à vulnerabilidade de redes têm sido mais estudados na literatura com o objetivo de informar sobre em que condições um grafo é ou não hamiltoniano. Esse capítulo é dedicado a eles, destacando-se o que há de mais relevante, sobretudo no que diz respeito à vulnerabilidade de redes.

### 5.1 Resistência

A primeira medida não-clássica para a vulnerabilidade de redes é a *resistência* de um grafo, introduzida por Chvátal [Ch73]. Essa medida visa encontrar um equilíbrio entre a cardinalidade de um conjunto de vértices a ser removido do grafo para torná-lo desconexo e a quantidade de componentes conexas resultante após a remoção do referido conjunto. Embora seja uma medida de vulnerabilidade, as pesquisas a ela referentes parecem destinadas a encontrar resultados que permitam determinar se um grafo é ou não hamiltoniano. Foram selecionados para esta seção apenas os resultados da resistência relativos à vulnerabilidade.

**Definição 5.1.** Um grafo  $G = (V, E)$  é dito  $t$ -resistente se  $\forall S \subset V$ ,  $|S| \geq t \cdot n_c(G - S)$  com  $n_c(G - S) \geq 2$ . A resistência (*toughness*) de um grafo  $G$ , denotada por  $t(G)$ , é o maior número real  $t \geq 0$  para o qual  $G$  é  $t$ -resistente.

Da desigualdade da Definição 5.1, resulta que  $\forall S \subset V$ ,  $t \leq \frac{|S|}{n_c(G - S)}$ . Assim, pode-se também definir a resistência de um grafo  $G$  como em [CK89]:

$$t(G) = \min_{S \subset V} \left\{ \frac{|S|}{n_c(G - S)} / n_c(G - S) \geq 2 \right\}.$$

No grafo  $G$  da Figura 5.1, o mínimo de  $\frac{|S|}{n_c(G-S)}$  é obtido quando se toma  $S = \{v_1, v_4\}$ . Neste caso,  $|S| = 2$  e  $n_c(G-S) = 2$ . Logo,  $t(G) = 1$  e, portanto,  $G$  é 1-resistente.

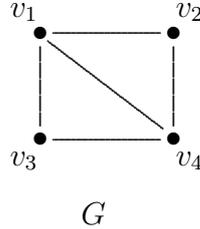


Figura 5.1: Grafo  $G$  com resistência  $t(G) = 1$ .

Chvátal [Ch73], interessado em obter resultados que estabelecessem quando um grafo fosse ou não hamiltoniano, passou a investigar as relações entre a resistência de um grafo e a sua hamiltonicidade. Ele provou a seguinte condição necessária para a hamiltonicidade de um grafo, que decorre imediatamente da definição da resistência: *Um grafo para ser hamiltoniano deve ser 1-resistente*. Além disso, Chvátal apresentou duas conjecturas, a primeira das quais já foi refutada e a segunda continua em aberto.

**Conjectura 5.1.** *Todo grafo 2-resistente é hamiltoniano.*

**Conjectura 5.2.** *Existe um número real  $t$  tal que todo grafo  $t$ -resistente é hamiltoniano.*

A Conjectura 5.2 é uma versão mais fraca da primeira, visto que na primeira, Chvátal afirma que a resistência máxima de grafos não-hamiltonianos é menor do que 2 e na segunda, ele diz que existe um número  $t$  tal que grafos não-hamiltonianos tem resistência menor que  $t$ . Bauer *et al.* [BBV00] refutaram a Conjectura 5.1, apresentando alguns contra-exemplos para a mesma, já Enomoto *et al.* [EJKS85] apresentaram uma seqüência de grafos não-2-fatoráveis com resistência tendendo a 2. Assim, 2 é o menor valor possível para a constante  $t$  da Conjectura 5.2. Vários artigos na literatura [BBV00, Ho95, KLM96, MS91] mostram que certos valores para  $t$  não satisfazem a Conjectura 5.2, a qual ainda permanece em aberto.

Nos Teoremas 5.1 e 5.2 são apresentados alguns limites para a resistência de um grafo que dependem da sua conectividade de vértices e do seu número de independência.

**Teorema 5.1 (Chvátal [Ch73]).** *Sejam  $G = (V, E)$  um grafo de ordem  $n$  e  $\alpha = \alpha(G)$  o número de independência de  $G$ . Então tem-se que:*

$$\frac{\kappa(G)}{\alpha} \leq t(G) \leq \frac{n - \alpha}{\alpha} .$$

O Teorema 5.1 pode ser muito útil para limitar a busca de algoritmos específicos para estimar a resistência de um grafo. No grafo da Figura 5.1,  $n = 4$ ,  $\alpha(G) = 2$  e  $\kappa(G) = 2$ . Logo, a resistência de  $G$  ao satisfazer a desigualdade acima, vale  $t(G) = 1$ .

Na Figura 5.2, o grafo completo  $K_4$  tem  $\alpha(K_4) = 1$  e  $\kappa(K_4) = 3$ . Analogamente ao caso anterior, para satisfazer a desigualdade do Teorema 5.1 é necessário se ter  $t(K_4) = 3$ .

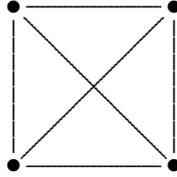


Figura 5.2:  $K_4$ .

**Teorema 5.2 (Chvátal [Ch73]).** *Sejam  $G$  um grafo e  $\kappa(G)$  a sua conectividade de vértice. Então*

*i) se  $H$  é um subgrafo abrangente de  $G$ , então  $t(H) \leq t(G)$  ;*

*ii)  $t(G) \leq \frac{\kappa(G)}{2}$  .*

A Figura 5.3 exibe um grafo com  $n = 7$  vértices, número de independência  $\alpha(G) = 3$  e conectividade de vértice  $\kappa(G) = 1$ . Utilizando-se o Teorema 5.1 e o Teorema 5.2 (ii), chega-se a  $\frac{1}{3} \leq t(G) \leq \frac{1}{2}$ . Porém, aplicando-se diretamente a Definição 5.1 obtém-se  $t(G) = \frac{1}{3}$ , satisfazendo o resultado acima.

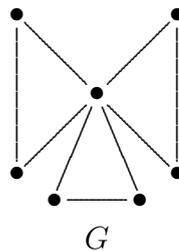


Figura 5.3: Grafo  $G$  com  $t(G) = \frac{1}{3}$ .

O grafo  $H$  da Figura 5.4 é um subgrafo abrangente de  $G$  dado na Figura 5.3. Aplicando-se o Teorema 5.1 para  $H$ , chega-se a  $t(H) = \frac{1}{6}$ , o que confirma a condição (i) do Teorema 5.2.

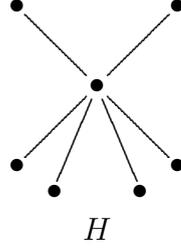


Figura 5.4: Grafo  $H$ .

**Definição 5.2.** Um grafo  $G = (V, E)$  é dito  $t$ -aresta resistente se  $\forall U \subset E, |U| \geq t \cdot n_c(G-U)$  com  $n_c(G-U) \geq 2$ . A resistência de aresta (*edge-toughness*) de um grafo  $G$ , denotada por  $t'(G)$ , é o maior número real  $t \geq 0$  para o qual  $G$  é  $t$ -aresta resistente.

No grafo  $G$  da Figura 5.5, o mínimo de  $\frac{|U|}{n_c(G-U)}$  é obtido quando se toma  $U = \{v_1v_3, v_3v_4\}$ , cuja cardinalidade é 2 e tal que  $n_c(G-U) = 2$ . Logo,  $t'(G) = 1$  e, portanto,  $G$  é 1-aresta resistente.

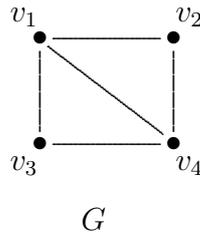


Figura 5.5: Grafo  $G$  1-aresta resistente.

Duas observações sobre a resistência de aresta de um grafo são imediatas. Primeiro, se  $G$  é  $t$ -aresta resistente então é  $t$ -resistente. Segundo, se  $G$  é hamiltoniano então é 1-aresta resistente [Ka97].

O próximo resultado dá um limite para  $t(G)$  em função da conectividade de vértice de  $G$  e do tamanho da maior estrela contida em  $G$ .

**Teorema 5.3 (Goddard e Swart [GS90b]).** *Sejam  $G$  um grafo não-trivial e  $s$  o maior inteiro tal que  $K_{1,s}$  é um subgrafo induzido de  $G$ . Então*

$$t(G) \geq \frac{\kappa(G)}{s}.$$

Observe que o grafo  $H$  da Figura 5.4 é o  $K_{1,6}$ , que é a maior estrela contida em  $G$  da Figura 5.3. Como  $\kappa(G) = 1$ ,  $t(G) = \frac{1}{3}$  e o tamanho de  $K_{1,6}$  é 6, segue-se, de acordo com o Teorema 5.3, que  $t(G) \geq \frac{1}{6}$ .

Os próximos resultados são conseqüências do Teorema 5.3 e relacionam a resistência de uma árvore  $T$  com o seu grau máximo  $\Delta(T)$  e com os conceitos de grafo  $k$ -regular e  $k$ -conexo [GS90b].

**Corolário 5.1.** *Se  $T$  é uma árvore então  $t(T) = \frac{1}{\Delta(T)}$ .*

**Corolário 5.2.** *Se  $G$  é  $k$ -regular e  $k$ -conexo então  $t(G) \geq \frac{1}{k}$ .*

O Teorema 5.4 estabelece uma relação entre a resistência e a resistência de aresta de um grafo  $G$  [Ka97].

**Teorema 5.4.** *Se  $G$  é um grafo  $2t$ -resistente então é  $t$ -aresta resistente.*

O grafo  $G$  da Figura 5.6 tem  $t(G) = 1$  e  $t'(G) = 1$ . Logo,  $G$  é  $t$ -resistente  $\forall t, 0 \leq t \leq 1$  e é  $t'$ -aresta resistente  $\forall t', 0 \leq t' \leq 1$ . Assim,  $G$  é  $2t$ -resistente e  $t$ -aresta resistente  $\forall t, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ . Em particular,  $G$  é 1-resistente e  $\frac{1}{2}$ -aresta resistente.

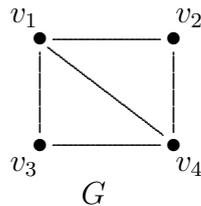


Figura 5.6: Grafo  $G$  1-resistente e  $\frac{1}{2}$ -aresta resistente.

A árvore  $H$  da Figura 5.7 tem  $t(H) = \frac{1}{6}$  e  $t'(H) = \frac{1}{2}$ . Logo,  $H$  é  $t$ -resistente  $\forall t, 0 \leq t \leq \frac{1}{6}$  e é  $t'$ -aresta resistente  $\forall t', 0 \leq t' \leq \frac{1}{2}$ . Assim,  $H$  é  $2t$ -resistente e  $t$ -aresta resistente  $\forall t, 0 \leq t \leq \frac{1}{12}$ . Em particular,  $H$  é  $\frac{1}{6}$ -resistente e  $\frac{1}{12}$ -aresta resistente.

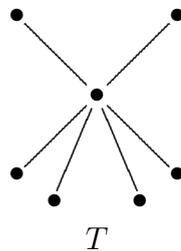


Figura 5.7: Árvore  $H$   $\frac{1}{6}$ -resistente e  $\frac{1}{12}$ -aresta resistente.

O Teorema 5.5 estabelece um limite inferior para a integridade de um grafo, em função da resistência e da ordem de  $G$ .

**Teorema 5.5 (Goddard e Swart [GS90a, GS90b]).** *Se  $G$  é um grafo não-completo com  $n$  vértices então*

$$I(G) \geq 2\sqrt{nt(G)} - t(G).$$

A árvore  $H$  da Figura 5.7 tem resistência  $t(H) = \frac{1}{6}$  e, pelo item c) do Teorema 4.6, a integridade de  $H$  é  $I(H) = 2$ . Logo, chega-se a  $2\sqrt{nt(G)} - t(G) \cong 1,9936$ , o que verifica o Teorema 5.5.

Algumas observações devem ser destacadas sobre a resistência de um grafo:

1. trata-se de um parâmetro que busca mensurar o equilíbrio entre a cardinalidade do conjunto de vértices removidos do grafo e a quantidade de componentes conexas resultantes, após a remoção deste conjunto;
2. a resistência é muito pesquisada e estudada na literatura com o objetivo de determinar se um grafo é ou não hamiltoniano;
3. é um parâmetro que não impõe restrições sobre o tamanho das componentes conexas resultantes da degradação do grafo [CK89];
4. Bauer *et al.* [BHS90] mostraram que o problema de se determinar a resistência de um grafo é NP-Hard.

## 5.2 Número de Dispersão

O *número de dispersão* é mais uma medida relativa à vulnerabilidade de uma rede que determina o equilíbrio entre a destruição da rede e o quanto de esforço foi empregado para destruí-la. Foi apresentado primeiramente por Jung [Ju78], mas só ganhou importância com Jamrozik *et al.* [JKS82] que estudaram pequenos grafos não-hamiltonianos utilizando a dispersão e com Hendry [He88] que o utilizou em grafos hamiltonianos extremais. Nesses artigos ficou constatado que o número de dispersão é mais conveniente do que o de resistência para descrever grafos extremais não-hamiltonianos. Zhang e Wang [ZW01] apresentam relações entre o número de dispersão com outras medidas, fornecendo um resultado que relaciona o número de dispersão de um grafo com o do seu complementar.

**Definição 5.3.** *O número de dispersão (scattering number) de um grafo conexo não-completo  $G = (V, E)$ ,  $s(G)$ , é definido por*

$$s(G) = \max_{S \subset V} \{n_c(G - S) - |S| \mid n_c(G - S) \geq 2\},$$

onde  $n_c(G - S)$  denota o número de componentes conexas do grafo  $G - S$ .

Para o grafo da Figura 5.8, ao se tomar  $S = \{v_2\}$  tem-se  $n_c(G - S) = 2$ . Como  $n_c(G - S) - |S| = 1$  e  $\nexists S' \subset V, S' \neq S$ , tal que  $n_c(G - S) - |S| < 1$ , da Definição 5.3, segue-se que  $s(G) = 1$ .

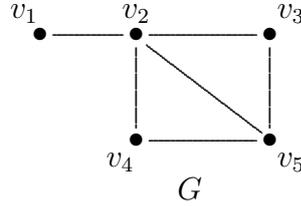


Figura 5.8: Grafo  $G$  tal que  $s(G) = 1$ .

O número de dispersão está fortemente relacionado com a resistência de um grafo  $G$  não-completo quando se refere ao estudo de sua hamiltonicidade. Giakoumakis *et al.* [GRT97] mostraram que dado um grafo  $G(V, E)$ , se  $S_1, S_2 \subset V$ , tais que  $s(G) = n_c(G - S_1) - |S_1|$  e  $t(G) = \frac{|S_2|}{n_c(G - S_2)}$ , então:

$$n_c(G - S_2)(1 - t(G)) \leq s(G) \leq n_c(G - S_1)(1 - t(G)).$$

Devido a esta desigualdade, para qualquer grafo  $G = (V, E)$  não-completo, se tem os seguintes resultados: (i)  $s(G) > 0$  se e somente se  $t(G) < 1$ ; (ii)  $s(G) = 0$  se e somente se  $t(G) = 1$ . Como para qualquer subconjunto próprio  $S \subset V$  de um grafo hamiltoniano  $G$  se tem  $n_c(G - S) \leq |S|$  então  $s(G) \leq 0$ . Isso é equivalente a  $t(G) \geq 1$ .

Os dois próximos teoremas devidos a [ZW01] apresentam limites superiores para  $s(G)$ , em função da ordem do grafo, da circunferência e/ou do diâmetro.

**Teorema 5.6.** *Seja  $G$  um grafo não-completo conexo de ordem  $n \geq 4$  com circunferência  $c(G)$ . Então*

$$s(G) \leq n - c(G).$$

**Teorema 5.7.** *Seja  $G$  um grafo não-completo conexo de ordem  $n \geq 4$  de diâmetro  $d_G$ . Então*

$$s(G) \leq n - d_G.$$

Os Teoremas 5.6 e 5.7 dão os melhores limites possíveis visto que existem grafos que satisfazem os resultados dos teoremas na igualdade. Por exemplo, o ciclo  $C_5$  tem  $c(C_5) = 5$  e  $s(C_5) = 0$  e o caminho de  $P_5$  tem  $d_{P_5} = 4$  e  $s(P_5) = 1$ .

O resultado a seguir dá mais um limite superior para o número de dispersão, agora, em função da ordem do grafo e do seu grau mínimo.

**Teorema 5.8 (Zhang e Wang [ZW01]).** *Seja  $G$  um grafo 2-conexo de ordem  $n > 2\delta(G)$ . Então*

$$s(G) \leq n - 2\delta(G).$$

O Teorema 5.9 relaciona o número de dispersão de  $G$  com a conectividade de vértices, de arestas e o grau mínimo de  $G$  [ZW01].

**Teorema 5.9.** *Seja  $G$  um grafo não-completo conexo de ordem  $n \geq 3$ . Então as seguintes desigualdades são verdadeiras:*

a)  $2 - \kappa(G) \leq s(G) \leq n - 2\kappa(G);$

b)  $2 - \lambda(G) \leq s(G) \leq n - 2\lambda(G);$

c)  $2 - \delta(G) \leq s(G) \leq n - 2\delta(G).$

Os limites inferiores de  $s(G)$  no Teorema 5.9 são os melhores possíveis, pois são válidos para  $G = K_\kappa + (K_1 \cup K_{n-\kappa-1})$ . Analogamente, ao se tomar  $G = K_\delta + K_{n-\delta}$ , os limites superiores são atingidos [ZW01].

O Teorema 5.10, o qual é fácil de ser provado a partir da definição do número de dispersão, limita  $s(G)$  em função da conectividade de vértice e do número de independência de  $G$ . Além disso, esse resultado suporta o Teorema 5.11.

**Teorema 5.10 (Zhang e Wang [ZW01]).** *Seja  $G$  um grafo não-completo de ordem  $n$ . Então*

$$2\alpha(G) - n \leq s(G) \leq \alpha(G) - \kappa(G).$$

**Teorema 5.11.** *Seja  $G$  um grafo conexo não-completo de ordem  $n$  e tal que seu complementar  $\overline{G}$  seja também conexo. Então as seguintes desigualdades são verdadeiras:*

$$5 - n \leq s(G) + s(\overline{G}) \leq n - 2.$$

O limite inferior é alcançado para os ciclos  $C_n$  ( $n \geq 5$ ) quando  $s(G) + s(\overline{G}) = 5 - n$ . Já o limite superior é atingido para  $G = (K_{n-1} - uv) \cup vw$ , onde  $u$  e  $v$  são vértices de  $K_{n-1}$  e  $w$  não; logo,  $s(G) + s(\overline{G}) = n - 2$ . Portanto, o Teorema 5.11 apresenta os melhores limites possíveis para  $s(G) + s(\overline{G})$ .

**Lema 5.1 (Wang [Wa92]).** *Se  $G$  é um grafo auto-complementar de ordem  $n$ , isto é,  $\overline{G} = G$ , então  $c(G) \geq n - 2$ .*

Dos Teoremas 5.6 e 5.11 e do Lema 5.1, segue-se o seguinte corolário [ZW01].

**Corolário 5.3.** *Seja  $G$  um grafo auto-complementar de ordem  $n$ . Então*

$$\frac{5-n}{2} \leq s(G) \leq 2.$$

Sobre o número de dispersão de um grafo, algumas observações podem ser assim resumidas:

- trata-se de um parâmetro que mede o equilíbrio entre esforço empregado para destruir o grafo e o estrago nele causado;
- é uma medida considerada mais conveniente do que a resistência com relação aos grafos maximais e extremos não-hamiltonianos [He88, JKS82];
- o número de dispersão não tem sido tão pesquisado quanto à resistência e à integridade;
- é um problema NP-Completo para muitas famílias de grafos, inclusive a dos grafos bipartidos, e polinomial para outras, como grafos de permutação [KKM94].

## 5.3 Número de Ligação

O número de ligação de um grafo busca maximizar a cardinalidade do conjunto de vértices a serem removidos do grafo e minimizar a cardinalidade da vizinhança de  $S$ . Logo, esse parâmetro busca encontrar o maior conjunto de vértices  $S$  que removido do grafo  $G$  não prejudique tanto a comunicação entre os demais elementos, uma vez que ele está pouco interligado com o restante do grafo.

**Definição 5.4.** *O número de ligação (binding number) de um grafo  $G = (V, E)$ ,  $bind(G)$ , é definido por*

$$bind(G) = \min_{S \subset V} \left\{ \frac{|\Gamma(S)|}{|S|} / \Gamma(S) \neq V \right\},$$

onde  $\Gamma(S) = \bigcup_{v \in S} \Gamma(v)$ .

No grafo  $G = (V, E)$  da Figura 5.9, ao se tomar  $S = \{v_1, v_2\}$  tem-se que  $\Gamma(S) = \{v_1, v_2, v_3\}$ . Logo,  $\frac{|\Gamma(S)|}{|S|} = \frac{3}{2}$ . Por enumeração, verifica-se que  $\nexists S' \subset V, S' \neq S$ , tal que  $\frac{|\Gamma(S')|}{|S'|} < \frac{3}{2}$ , segue que  $bind(G) = \frac{3}{2}$ .

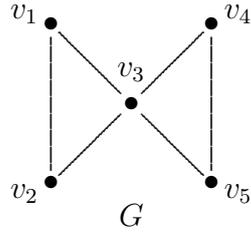


Figura 5.9: Grafo  $G$  com  $bind(G) = \frac{3}{2}$ .

Este parâmetro foi apresentado por Woodall [Wo73] que provou que: *dado um grafo  $G$  de ordem  $n$ , se  $bind(G) \geq \frac{3}{2}$  então  $G$  é hamiltoniano*. Assim, semelhantemente à resistência, é uma medida mais utilizada como critério de determinação sobre a hamiltonicidade de um grafo.

Embora a Definição 5.4 não exija que o grafo seja desconectado após a remoção dos vértices, o número de ligação pode ser um parâmetro interessante para medir a vulnerabilidade de uma rede. Dados dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ , tais que  $bind(G_1) < bind(G_2)$  nota-se, a partir da definição, que é mais fácil desconectar um grande conjunto de vértices de  $G_1$  do que de  $G_2$ . Como exemplo, sejam duas redes que representam afinidades entre pares de pessoas e que sejam modeladas respectivamente por  $G_1$  e  $G_2$ . Se  $bind(G_1) < bind(G_2)$  então é mais fácil encontrar um subconjunto grande de pessoas em  $G_1$  que praticamente não se relacione com o resto do grupo do que identificar um grupo em  $G_2$  com essa característica.

O número de ligação tem sido pouco estudado e não existe resultados na literatura que o relaciona com a vulnerabilidade de redes nem mesmo com outros parâmetros. No entanto, um estudo mais profundo desse parâmetro parece ser importante, já que ele trás informações interessantes sobre a rede e, além disso, Cunningham mostrou em [Cu90] que este parâmetro pode ser determinado em tempo polinomial.

# Capítulo 6

## Ordenação em Classes de Grafos

Neste capítulo é introduzida uma relação de ordem na família dos grafos com respeito a um operador constituído por uma lista de parâmetros de vulnerabilidade. Esta ordenação generaliza a definição clássica de ordenação de grafos, segundo a conectividade de vértices [AH73, ST81] e que vem a seguir.

**Definição 6.1.** *Sejam  $G_1$  e  $G_2$  dois grafos. Diz-se que  $G_1$  é mais vulnerável que  $G_2$  se e somente se  $\kappa(G_1) \leq \kappa(G_2)$ . Mais especificamente, é comum dizer que  $G_1$  é tão vulnerável quanto  $G_2$  quando vale a igualdade, isto é,  $\kappa(G_1) = \kappa(G_2)$ .*

Como há muitos parâmetros capazes de medir a vulnerabilidade de redes, a Definição 6.1 é muito restrita e, por isso mesmo, insuficiente. Assim, a relação de ordem aqui introduzida generaliza a Definição 6.1 por ser relacionada a um conjunto qualquer de parâmetros de vulnerabilidade. Quando esse conjunto for unitário e constituído apenas pela conectividade de vértices então a nova relação de ordem torna-se equivalente à dada pela Definição 6.1.

Sejam  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , funções cujo domínio é o conjunto dos grafos conexos e a imagem o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ . A partir dessas funções, define-se um  $q$ -operador  $W = W(w_1, w_2, \dots, w_q)$  aplicado a um grafo  $G$  para determinar o seguinte vetor de  $\mathbb{R}^q$  :

$$W(w_1, w_2, \dots, w_q)(G) = (w_1(G), w_2(G), \dots, w_q(G)) \text{ .}$$

Quando para cada grafo  $G$  e para cada  $i = 1, \dots, q$ ,  $w_i(G)$  são parâmetros de vulnerabilidade de  $G$ , o  $q$ -operador  $W = W(w_1, w_2, \dots, w_q)$  é chamado *operador de vulnerabilidade*.

**Definição 6.2.** *Sejam  $G_1$  e  $G_2$  dois grafos conexos e um  $q$ -operador de vulnerabilidade  $W(w_1, w_2, \dots, w_q)$ . Diz-se que:*

1.  $G_1$  é mais vulnerável que  $G_2$  se e somente se  $\forall i, 1 \leq i \leq q, w_i(G_1) \leq w_i(G_2)$  ;

2.  $G_1$  é tão vulnerável quanto  $G_2$  quando  $\forall i, 1 \leq i \leq q, w_i(G_1) = w_i(G_2)$ ;
3.  $G_1$  é estritamente mais vulnerável que  $G_2$  se e somente se  $\forall i, 1 \leq i \leq q, w_i(G_1) < w_i(G_2)$ ;
4.  $G_1$  não é comparável a  $G_2$  quando existirem  $t$  e  $t', 1 \leq t < t' \leq q$ , tais que  $w_t(G_1) < w_t(G_2)$  e  $w_{t'}(G_1) > w_{t'}(G_2)$ .

Em verdade a Definição 6.2 define uma relação entre pares de grafos que precisa ser provada ser uma relação de ordem no conjunto dos grafos. No entanto, a prova é dispensável, uma vez que a relação definida é introduzida a partir da ordem natural dos números reais, quando são comparados  $w_i(G_1)$  com  $w_i(G_2)$  ( $i = 1, \dots, q$ ).

Dados dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ , a determinação de uma ordem entre  $G_1$  e  $G_2$  depende do  $q$ -operador de vulnerabilidade considerado. Por exemplo, sejam os grafos  $G_1, G_2$  e  $G_3$  das Figuras 6.1, 6.2 e 6.3, respectivamente e seja o  $q$ -operador  $W = (\kappa; \lambda; a; t; I)$ , onde  $q = 5, w_1 = \kappa$  é a conectividade de vértices,  $w_2 = \lambda$  é a conectividade de aresta,  $w_3 = a$  é a conectividade algébrica,  $w_4 = t$  é a resistência e, finalmente,  $w_5 = I$  é o número de integridade. Assim, tem-se

$$W(G_j) = (\kappa(G_j); \lambda(G_j); a(G_j); t(G_j); I(G_j)).$$

Esse operador aplicado aos grafos  $G_1, G_2$  e  $G_3$  determina, respectivamente, os seguintes vetores:

$$W(G_1) = (1; 1; 1; 0, 5; 3), \quad W(G_2) = (1; 2; 1; 0, 5; 3) \quad \text{e} \quad W(G_3) = (2; 2; 1, 38; 1; 4).$$

Observando-se  $W(G_1), W(G_2)$  e  $W(G_3)$ , vê-se que  $G_1$  é mais vulnerável que  $G_2$  e  $G_2$  é mais vulnerável que  $G_3$ , resultando da transitividade que  $G_1$  é mais vulnerável que  $G_3$ .

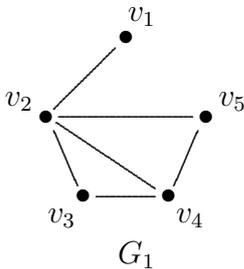


Figura 6.1:  $G_1$ .

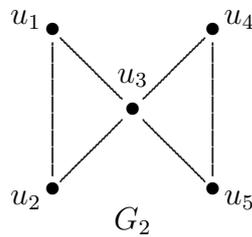


Figura 6.2:  $G_2$ .

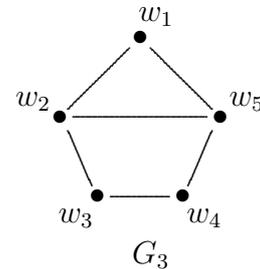


Figura 6.3:  $G_3$ .

Sejam  $G_1, G_2, G_3$  e  $G_4$  exibidos nas Figuras 6.1, 6.2, 6.3 e 6.4 e seja o  $q$ -operador  $W(G_j)$ , para  $q = 5$ , como definido acima. Tem-se que  $W(G_4) = (1; 1; 0, 83; 0, 5; 4)$ . É fácil ver que todos os parâmetros de  $W(G_4)$  são menores ou iguais que os seus correspondentes em

$W(G_2)$ , exceto para  $I(G_4) > I(G_2)$ . Assim,  $G_4$  não é comparável à  $G_2$  com relação ao  $q$ -operador relativo aos parâmetros conectividade de vértice, de aresta, algébrica, resistência e integridade. Se o  $q$ -operador fosse definido para  $q = 4$  com  $w_1 = \kappa$ ,  $w_2 = \lambda$ ,  $w_3 = a$  e  $w_4 = t$ , esse seria dado por  $W'(\kappa; \lambda; a; t)(G_j)$  e, assim,  $G_4$  seria mais vulnerável que  $G_2$  com relação a  $W'$ ; e se o  $q$ -operador de vulnerabilidade considerado, para  $q = 3$  tivesse como parâmetros a conectividade de vértices, a resistência e a integridade, então  $W''(\kappa; t; I)(G_j)$  seria o  $q$ -operador e  $G_2$  seria mais vulnerável que  $G_4$ .

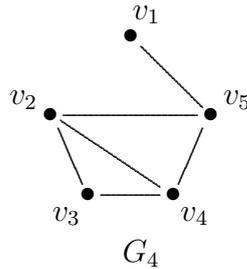


Figura 6.4:  $G_4$ .

Portanto, é muito importante estabelecer um  $q$ -operador adequado, quando se deseja comparar a vulnerabilidade entre dois grafos. É preciso saber quais parâmetros são mais convenientes para o que se deseja avaliar. Uma sugestão a priori seria admitir um  $q$ -operador constituído pelos parâmetros de conectividade do pior caso. Esse operador seria composto apenas pela conectividade de vértices, de arestas e a conectividade algébrica e poderia ser usado em grafos mais gerais. Por exemplo,  $q$ -operadores simples como esse não deveriam ser aplicados para comparação de grafos como caminhos ou ciclos, onde as conectividades de vértice e de arestas são constantes em função da ordem do grafo e somente a conectividade algébrica seria capaz de poder decidir sobre a vulnerabilidade desse grafos. Na comparação de ciclos e caminhos seria suficiente um  $q$ -operador unitário constituído somente pela conectividade algébrica.

A seguir, a título de ilustração e teste para uma avaliação inicial, a Definição 6.2 será aplicada a árvores, em particular aos caminhos e às estrelas. Também serão testados alguns grafos unicíclicos, com destaque para os ciclos.

Cabe ressaltar aqui que o número de dispersão não deve entrar em nenhum  $q$ -operador, pois, pela sua natureza,  $G_1$  é mais vulnerável que  $G_2$  quando  $s(G_1) \geq s(G_2)$ .

## 6.1 Ordenações em Árvores

Uma árvore  $T$  é um grafo conexo sem ciclos. Casos particulares de árvores, como os caminhos e as estrelas, serão estudados mais detalhadamente.

Para estabelecer uma relação de ordem na classe das árvores é necessário que o valor de cada um dos parâmetros de um  $q$ -operador seja conhecido. Entretanto nem todos podem ser calculados facilmente. Para alguns dos parâmetros são conhecidos apenas alguns limites. Por exemplo, sabe-se da literatura que  $\kappa(T) = \lambda(T) = 1$  e, do Corolário 5.1,  $t(T) = \frac{1}{\Delta(T)}$ . Logo, todas as árvores são igualmente vulneráveis com relação ao  $q$ -operador  $W_1(\kappa; \lambda)(T)$  para  $q = 2$  com  $w_1 = \kappa$  e  $w_2 = \lambda$ ; caso o  $q$ -operador fosse  $W_2(T) = W_2(\kappa; \lambda; t)(T)$  para  $q = 3$  com  $w_1 = \kappa$ ,  $w_2 = \lambda$  e  $w_3 = t$  e se  $T$  e  $T'$  são duas árvores tais que  $\Delta(T) \geq \Delta(T')$  então  $t(T) \leq t(T')$  e, assim,  $T$  seria mais vulnerável que  $T'$ .

A Proposição 3.8 dá um limite superior para a conectividade algébrica em função do diâmetro  $d_T$ , onde  $a(T) \leq 2[1 - \cos \frac{\pi}{d_T+1}]$ . Ao se combinar os Teoremas 4.11 e 4.15, obtém-se o seguinte resultado para a integridade: se  $\Delta(T) \geq \frac{n}{2}$  então  $I(T) \leq \Delta(T) + 1$ ; e se  $\Delta(T) < \frac{n}{2}$  então  $I(T) \leq \frac{n+3}{2}$ .

Portanto, é necessário definir um  $q$ -operador adequado para a comparação de árvores em virtude do conhecimento dos parâmetros disponíveis na literatura. Como exemplo, não se conhece uma expressão matemática que calcule o número de dispersão para as árvores, o que impede a inclusão desse parâmetro num desses operadores.

### 6.1.1 Caminhos

Como vimos na Definição 2.12, um caminho  $P_n$  é um grafo de ordem  $n$  formado por uma seqüência finita de vértices e arestas que se inicia num vértice  $v_i$  e termina num vértice  $v_j$  na qual cada aresta da seqüência liga o vértice que a antecede ao vértice que a sucede, de modo que os vértices na seqüência sejam todos distintos. Para tais grafos sabe-se da literatura que  $\kappa(P_n) = 1$  e  $\lambda(P_n) = 1$ . Além disso, da Proposição 3.5 e do Teorema 4.6, se tem os respectivos valores para  $a(P_n) = 2[1 - \cos \frac{\pi}{n}]$  e  $I(P_n) = \lceil 2\sqrt{n+1} \rceil - 2$ .

As proposições, a seguir, estabelecem o valor da resistência e do número de dispersão para os caminhos. As provas que se seguem, embora sejam meros exercícios, são contribuições do autor dessa dissertação.

**Proposição 6.1.** *Para  $n \geq 3$ , a resistência de um caminho  $P_n$  é  $\frac{1}{2}$ .*

***Prova:***

Como é sabido, todo caminho é uma árvore e como  $\Delta(P_n) = 2 \forall n \geq 3$ , tem-se, pelo Corolário 5.1, que  $t(P_n) = \frac{1}{2}$ . □

**Proposição 6.2.** Para  $n \geq 3$ , o número de dispersão de um caminho  $P_n$  é 1.

**Prova:**

Para  $P_3$  este resultado é imediato.

Como o diâmetro do caminho  $P_n$  é  $n - 1$ , então, do Teorema 5.7,  $s(P_n) \leq 1$ .

Tomando-se  $S = \{u\}$ , onde  $u$  é um vértice de  $P_n$  que não está numa extremidade do caminho, chega-se a  $n_c(P_n - u) = 2$ . Logo,  $n_c(P_n - u) - |u| = 1$ ,  $\forall n \geq 3$ .

Desde que  $s(P_n) \leq 1$  e existe um subconjunto de vértices de  $P_n$  com  $n_c(P_n - u) - |u| = 1$ , conclui-se, da Definição 5.3, que  $s(P_n) = 1$ . □

Assim, para os caminhos sempre é válido:

$$\kappa(P_n) = \lambda(P_n) = t(P_n) = s(P_n) = 1 .$$

Logo, se  $P_{n_1}$  e  $P_{n_2}$  são dois caminhos com  $n_1 \neq n_2$ , então  $P_{n_1}$  é tão vulnerável quanto  $P_{n_2}$  com relação ao  $q$ -operador para  $q = 4$  formado somente por esses 4 parâmetros.

A conectividade algébrica e a integridade dos caminhos dependem de suas respectivas cardinalidades. Daí, conclui-se que essas são medidas melhores para compor o operador para a comparação de caminhos, visto que elas são mais sensíveis para captar as diferenças entre caminhos de comprimentos distintos. Oliveira [Ol03] mostrou que quanto maior for a ordem de um caminho mais próxima de zero será sua conectividade algébrica. Logo, quanto maior for um caminho, mais vulnerável ele é com relação ao operador que inclua a conectividade algébrica como parâmetro. Por exemplo, o  $q$ -operador  $W_1(P_n) = W_1(\kappa, \lambda, a, t)(P_n)$  para  $q = 4$ . Por outro lado, quanto menor é a ordem do caminho, menor será sua integridade e, logo, tem-se que caminhos de pequenos comprimentos são mais vulneráveis para o  $q$ -operador  $W_2(P_n) = W_2(\kappa, \lambda, t, I)(P_n)$  para  $q = 4$ . Entretanto, ao tomar o  $q$ -operador  $W_3(P_n) = W_3(a, I)(P_n)$  para  $q = 2$ , os caminhos de ordens diferentes são, em geral, não comparáveis. Portanto, não é possível considerar um operador que contenha ao mesmo tempo a conectividade algébrica e a integridade.

De fato, é muito importante saber o que se quer medir em relação à vulnerabilidade do grafo para que seja adequadamente escolhido um  $q$ -operador de vulnerabilidade; no caso dos caminhos, se o que se deseja é determinar quais são os caminhos mais propensos a serem desconectados então o operador deve conter a conectividade algébrica, mas, se pretende-se saber quais são os caminhos que ao serem retirados uma pequena quantidade de vértices, a ordem da maior componente conexa é pequena então o operador deve conter a integridade.

## 6.1.2 Estrelas

Da Definição 2.27, uma estrela é um grafo bipartido completo onde um de seus conjuntos da partição é unitário. É sabido que  $\kappa(K_{1,s}) = \lambda(K_{1,s}) = 1$ . Do Teorema 4.6,  $I(K_{1,s}) = 2$ .

A Proposição 6.3, conseqüência imediata da Proposição 3.7, determina a conectividade algébrica da estrela.

**Proposição 6.3.** *Para  $s \geq 2$ , a conectividade algébrica de uma estrela  $K_{1,s}$  é  $a(K_{1,s}) = 1$ .*

As proposições a seguir são pequenas contribuições dessa dissertação que determinam a resistência e o número de dispersão para as estrelas.

**Proposição 6.4.** *Para  $s \geq 2$ , a resistência da estrela  $K_{1,s}$  é  $\frac{1}{s}$ .*

**Prova:**

Imediata a partir do Corolário 5.1 e do fato de toda estrela ser uma árvore com  $\Delta(K_{1,s}) = s$ . □

**Proposição 6.5.** *Para  $s \geq 2$ , o número de dispersão da estrela  $K_{1,s}$  é  $s - 1$ .*

**Prova:**

Como  $\delta(K_{1,s}) = 1$ , do Teorema 5.9, tem-se que  $s(K_{1,s}) \leq s - 1$ . Como  $K_{1,s}$  é bipartido, tem-se  $S = \{v_1\}$  e  $V - S = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$  como os conjuntos da sua bipartição. Logo,  $n_c(K_{1,s} - S) = s$ . Daí,  $n_c(K_{1,s} - S) - |S| = s - 1$ . Como existe um subconjunto de vértices de  $K_{1,s}$  com  $n_c(K_{1,s} - S) - |S| = s - 1$  e  $s(K_{1,s}) \leq s - 1$ , da Definição 5.3,  $s(K_{1,s}) = s - 1$ . □

Para as estrelas sempre vale as seguintes igualdades  $\kappa(K_{1,s}) = \lambda(K_{1,s}) = a(P_n) = 1$  e  $I(K_{1,s}) = 2$ . Logo,  $K_{1,s_1}$  é tão vulnerável quanto  $K_{1,s_2}$  com relação ao  $q$ -operador  $\widetilde{W}(G) = \widetilde{W}(\kappa, \lambda, a, I)(G)$  para  $q = 4$ . Entretanto, a resistência e o número de dispersão das estrelas dependem de  $s$  e, conseqüentemente, essas medidas são mais sensíveis para captar a diferença entre elas. Observe que essas medidas envolvem o número de componentes conexas do grafo resultante e, daí, tem-se que essa é a característica predominante das estrelas. Assim, dada uma estrela  $K_{1,s}$ , quanto maior for o valor de  $s$  mais vulnerável é a estrela com relação ao  $q$ -operador  $W'(G) = W'(t)(G)$  para  $q = 1$ .

### 6.1.3 Sobre Ordenações no Caso Geral

A seguir estão enumeradas todas as árvores de ordem  $5 \leq n \leq 7$ , exceto os caminhos e as estrelas já estudadas separadamente. Árvores de ordem entre 1 e 4 não são estudadas aqui, pois todas elas são ou caminhos ou estrelas.

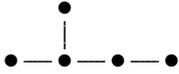


Figura 6.5: Árvore  $T_1$ .

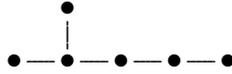


Figura 6.6: Árvore  $T_2$ .

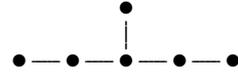


Figura 6.7: Árvore  $T_3$ .

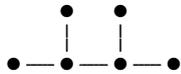


Figura 6.8: Árvore  $T_4$ .

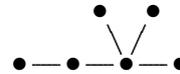


Figura 6.9: Árvore  $T_5$ .

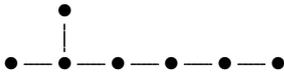


Figura 6.10: Árvore  $T_6$ .

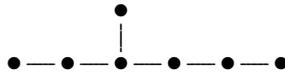


Figura 6.11: Árvore  $T_7$ .

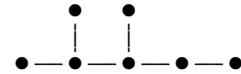


Figura 6.12: Árvore  $T_8$ .



Figura 6.13: Árvore  $T_9$ .

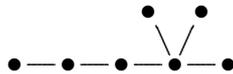


Figura 6.14: Árvore  $T_{10}$ .

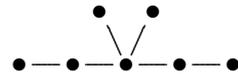


Figura 6.15: Árvore  $T_{11}$ .



Figura 6.16: Árvore  $T_{12}$ .

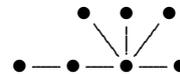


Figura 6.17: Árvore  $T_{13}$ .

A Tabela 6.1 sumariza os valores da conectividade de vértice, da conectividade de aresta, da conectividade algébrica, da resistência e da integridade de cada uma dessas árvores.

Ao analisar os valores dos parâmetros de vulnerabilidade para as árvores da Tabela 6.1 observa-se que a conectividade algébrica é o parâmetro mais sensível para avaliar a vulnerabilidade e nota-se que quanto maior é o diâmetro do grafo menor é o seu valor e, portanto, maior é a sua vulnerabilidade. Por exemplo, considere as árvores  $T_6$ ,  $T_8$  e  $T_{13}$  e o  $q$ -operador

$W(T) = W(\kappa, \lambda, a)(T)$  para  $q = 3$ . Tem-se que  $T_8$  é mais vulnerável do que  $T_{13}$  e  $T_6$  é mais vulnerável do que  $T_8$  com relação a  $W(T)$  e que  $d_{T_6} = 5$ ,  $d_{T_8} = 4$  e  $d_{T_{13}} = 3$ . Nota-se ainda que dessas três árvores citadas a mais vulnerável é a mais esparsa e a menos vulnerável é a mais densa.

Árvores													
Parâmetros	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$T_6$	$T_7$	$T_8$	$T_9$	$T_{10}$	$T_{11}$	$T_{12}$	$T_{13}$
$\kappa$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\lambda$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbf{a}$	0,52	0,32	0,38	0,44	0,49	0,23	0,26	0,32	0,27	0,30	0,38	0,40	0,47
$\mathbf{t}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
$\mathbf{I}$	3	3	3	3	3	4	4	4	3	3	3	3	3

Tabela 6.1: Valores de parâmetros de vulnerabilidade para as árvores  $T_1$  a  $T_{13}$ .

## 6.2 Ordenações em Grafos Unicíclicos

Um grafo unicíclico  $G$  é um grafo que contém apenas um ciclo. É claro que os ciclos constituem uma classe especial dos grafos unicíclicos e que, por isso, serão estudados separadamente.

### 6.2.1 Ciclos

Da Definição 2.13, um ciclo  $C_n$  é um grafo de ordem  $n$  formado por um caminho fechado, ou seja, um caminho onde o primeiro e o último vértices coincidem. Para tais grafos sabe-se da literatura que  $\kappa(C_n) = 2$  e  $\lambda(C_n) = 2$ . Além disso, da Proposição 3.6 e do Teorema 4.6, respectivamente se tem  $a(C_n) = 2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n}$  e  $I(C_n) = \lceil 2\sqrt{n} \rceil - 1$ .

As proposições a seguir são pequenas contribuições dessa dissertação que determinam a resistência e o número de dispersão para os ciclos.

**Proposição 6.6.** *Para  $n \geq 4$ , a resistência do ciclo  $C_n$  é 1.*

***Prova:***

Como  $C_n$  é um grafo 2-regular e 2-conexo, do Corolário 5.2,  $t(C_n) \geq 1$ .

Se  $S = \{u, v\}$ , onde  $u$  e  $v$  são dois vértices não-adjacentes quaisquer de  $C_n$ , então  $n_c(C_n - S) = 2$ . Logo,  $\frac{|S|}{n_c(C_n - S)} = 1$ . Portanto, da Definição 5.1,  $t(C_n) = 1$ . □

**Proposição 6.7.** Para  $n \geq 4$ , o número de dispersão do ciclo  $C_n$  é 0.

**Prova:**

Como  $c(C_n) = n$ , então, do Teorema 5.6,  $s(C_n) \leq 0$ . Se  $S = \{u, v\}$ , onde  $u$  e  $v$  são dois vértices não-adjacentes quaisquer de  $C_n$ , então  $n_c(C_n - S) = 2$ . Logo,  $n_c(C_n - S) - |S| = 0$ . Portanto, da Definição 5.3,  $s(C_n) = 0$ . □

Como os ciclos têm os seguintes parâmetros constantes  $\kappa(C_n) = \lambda(C_n) = 2$ ,  $t(C_n) = 1$  e  $s(C_n) = 0$ , conclui-se que dados dois ciclos  $C_{n_1}$  e  $C_{n_2}$  de ordem  $n_1$  e  $n_2$ ,  $C_{n_1}$  será tão vulnerável quanto  $C_{n_2}$ , se o  $q$ -operador considerado for  $\widetilde{W}(G) = \widetilde{W}(\kappa; \lambda; t)(G)$  para  $q = 3$ . As medidas de vulnerabilidade mais eficientes para se comparar ciclos seriam a conectividade algébrica e a integridade já que dependem de sua ordem. Assim, dado um ciclo  $C_n$ , quanto maior for sua ordem, mais vulnerável é o ciclo com relação ao  $q$ -operador  $W'(G) = W'(a)(G)$  para  $q = 1$ , e quanto menor for sua ordem, mais vulnerável ele será se o  $q$ -operador for  $W''(G) = W''(I)(G)$  para  $q = 1$ .

### 6.2.2 Sobre Ordenações no Caso Geral

Nesta seção são enumerados todos os grafos unicíclicos de ordem 4, 5 e 6 a fim de avaliar qual seria um possível operador de vulnerabilidade capaz de estabelecer uma relação de ordem entre eles.

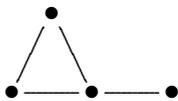


Figura 6.18:  $G_1$ .

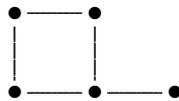


Figura 6.19:  $G_2$ .

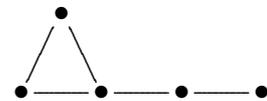


Figura 6.20:  $G_3$ .

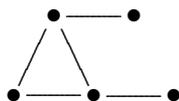


Figura 6.21:  $G_4$ .

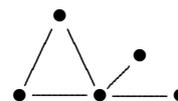


Figura 6.22:  $G_5$ .

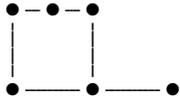


Figura 6.23:  $G_6$ .

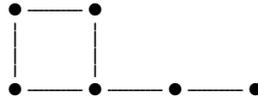


Figura 6.24:  $G_7$ .

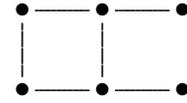


Figura 6.25:  $G_8$ .

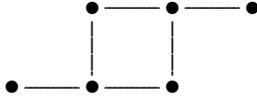


Figura 6.26:  $G_9$ .

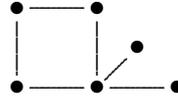


Figura 6.27:  $G_{10}$ .



Figura 6.28:  $G_{11}$ .

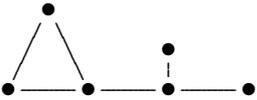


Figura 6.29:  $G_{12}$ .

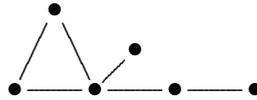


Figura 6.30:  $G_{13}$ .

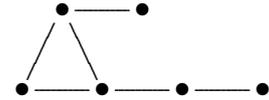


Figura 6.31:  $G_{14}$ .

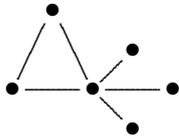


Figura 6.32:  $G_{15}$ .

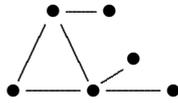


Figura 6.33:  $G_{16}$ .

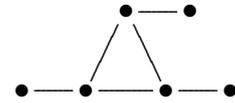


Figura 6.34:  $G_{17}$ .

A Tabela 6.2 resume os valores da conectividade de vértice, da conectividade de aresta, da conectividade algébrica, da resistência e da integridade de cada um dos grafos unicíclicos acima.

Analisando os valores dos parâmetros de vulnerabilidade para os grafos unicíclicos da Tabela 6.2, observa-se que o parâmetro mais sensível para avaliar a vulnerabilidade é a conectividade algébrica. Além disso, nota-se que quanto maior for o diâmetro do grafo menor será o valor da conectividade algébrica. Por exemplo, considere os grafos  $G_{10}$ ,  $G_{11}$  e  $G_{15}$  e o  $q$ -operador  $W(G) = W(\kappa, \lambda, a)(G)$  para  $q = 3$ . Tem-se que  $G_{10}$  é mais vulnerável do que  $G_{15}$  e  $G_{11}$  é mais vulnerável do que  $G_{10}$  e que  $d_{G_{10}} = 3$ ,  $d_{G_{11}} = 4$  e  $d_{G_{15}} = 2$ , com relação a  $W(G)$ . No entanto, outros fatores parecem influenciar, já que existem pares de grafos onde o grafo com maior diâmetro é menos vulnerável. Isso parece ser explicado pelo fato de um grafo ser mais esparsos que outro. Por exemplo, os grafos  $G_9$  e  $G_{12}$  que têm diâmetros, respectivamente, iguais a 4 e 3, mas com  $G_{12}$  mais vulnerável do que  $G_9$ , com relação ao operador dado. Outro fator que parece contribuir para essa conclusão é o fato que comparando-se os valores contidos nas Tabelas 6.1 e 6.2, na grande maioria dos casos, as árvores são mais vulneráveis do que os grafos unicíclicos, o que de fato seria o esperado.

Grafos Unicíclicos

Parâmetros	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$	$G_5$	$G_6$	$G_7$	$G_8$	$G_9$	$G_{10}$	$G_{11}$	$G_{12}$	$G_{13}$	$G_{14}$	$G_{15}$	$G_{16}$	$G_{17}$
$\kappa$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\lambda$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbf{a}$	1	0,83	0,52	0,70	1	0,70	0,44	0,66	0,59	0,76	0,32	0,44	0,49	0,52	1	0,63	0,70
$\mathbf{t}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{I}$	3	3	3	3	3	4	4	4	3	3	4	4	3	4	3	3	4

Tabela 6.2: Valores de parâmetros de vulnerabilidade para os grafos unicíclicos  $G_1$  à  $G_{17}$ .

# Capítulo 7

## Considerações Finais

Nesta tese foram reunidos os parâmetros de grafos utilizados para medir a vulnerabilidade de uma rede a fim de se ter uma idéia geral do que cada um deles informa sobre a vulnerabilidade, sobre a complexidade de cálculo, sobre os resultados teóricos a eles relacionados e sobre a sua possível utilização em aplicações práticas. Uma das principais constatações alcançadas aqui é que a maioria dos parâmetros de vulnerabilidade são difíceis de serem calculados por se tratarem de problemas NP-Hard, como é o caso do cálculo da conectividade algébrica, ou da resistência, ou ainda, da integridade. Os problemas polinomiais são relativos à determinação da conectividade de vértices e de arestas. Assim, pesquisadores têm concentrado seus trabalhos para alcançar os seguintes objetivos: determinar o valor dos parâmetros para famílias especiais de grafos, estabelecer limites cada vez melhores para eles e elaborar algoritmos que determinem de modo exato ou aproximado o valor de cada um dos parâmetros considerados. Outra observação é que um grande número desses parâmetros parecem ter mais sucesso na avaliação de grafos hamiltonianos do que como medida de vulnerabilidade.

A dificuldade de cálculo de muitos dos parâmetros não clássicos faz com que esses percam para os parâmetros convencionais de conectividade (conectividade de vértice e de aresta) no que diz respeito ao uso em aplicações práticas, dado que para esses últimos estão disponíveis uma quantidade maior de resultados teóricos e algoritmos de cálculo.

Vimos também que a inconveniência das medidas mais convencionais está na sua simplicidade, por medir apenas a vulnerabilidade no pior caso, isto é, por medir a vulnerabilidade resultante de um ataque ótimo [CK89], não sendo suficientes para fornecer informações como: quais os elementos que devem ser removidos para desconectar a rede ou quais são as propriedades das subredes resultantes. Por isso, alguns autores sugerem o uso das conectividades de vértices e de arestas como uma medida secundária na obtenção de limites para outras medidas [Do89, HA73, Sm84].

A conectividade algébrica é o único parâmetro espectral de grafo utilizado como medida

de vulnerabilidade de redes [Fi73, Me94]. Trata-se de um invariante muito estudado na Teoria Espectral de Grafos com um ferramental matemático rico, mas muito pouco explorado em aplicações nas áreas relativas à vulnerabilidade de redes. Por isso, é possível inferir que a conectividade algébrica merece mais atenção dos pesquisadores de áreas aplicadas. Um exemplo disso, é a seguinte conjectura: *quanto mais próximo de zero está a conectividade algébrica, mais vulnerável o grafo parece ser* [Ol03]. Nesta tese ficou constatado que a conectividade algébrica é o parâmetro mais sensível para avaliar a propensão de um grafo para ser desconectado, se considerado grafos de mesma família como caminhos e ciclos e quando somente o número de vértices é alterado.

Os parâmetros não convencionais surgem a partir da década de 70 com o objetivo de sanar a ineficiência das medidas clássicas. Existem inúmeros deles, em especial, destacamos a *resistência*, a *integridade* e o *número de dispersão*.

A resistência de um grafo mede o equilíbrio entre a cardinalidade do conjunto de vértices removidos e a quantidade de componentes conexas do grafo resultante [Ch73, EJKS85, GS90b, He99, Ho95, Ka97, KLM96]. Pode ser utilizada quando o interesse é remover o menor número de vértices do grafo para obter o maior número de componentes conexas. Empresas aéreas podem utilizá-la para medir quão vulnerável é o conjunto de rotas de seus vôos, utilizando-se da resistência, que quando baixa significa que mesmo sendo impossível haver pousos e decolagens em alguns poucos aeroportos, um grande número de regiões pode se tornar inacessível pela frota de aviões empregada. Essa medida vem sendo muito utilizada em problemas relacionados a grafos hamiltonianos. Um desafio seria aplicá-la mais em vulnerabilidade de redes. A inconveniência é que a sua determinação é um problema *NP-hard* [BHS90] e, além disso, é um parâmetro que não impõe restrições sobre o tamanho das componentes conexas resultantes da degradação do grafo [CK89].

Como no caso da resistência, o número de dispersão mede o equilíbrio entre esforço empregado para destruir o grafo e o estrago a ele causado. Parece uma medida mais adequada ao estudo da hamiltonicidade do que a resistência [He88, JKS82, ZW01]. Seria interessante uma avaliação e uma comparação entre esses dois parâmetros no caso da vulnerabilidade de redes.

A integridade de um grafo deve ser utilizada quando se deseja que tanto o número de elementos removidos, quanto a ordem da maior componente conexa resultante, sejam quantidades simultaneamente pequenas [BBGLP92, BBLP94, CEF87]. A determinação da integridade é um problema *NP-Completo* [CEF87], sendo polinomial para o caso das árvores [FS89]. Bons limites superiores para a integridade de vértices são difíceis de serem obtidos, mas os mais interessantes existentes são dados em termos dos números de Ramsey  $R(i, j)$  que, infelizmente, também são difíceis de serem determinados para a maioria dos grafos e dos

valores de  $i$  e  $j$ .

Existem ainda outros parâmetros não convencionais para a vulnerabilidade de redes. Dentre eles, os seguintes parâmetros compõem o trabalho: a *conectividade condicional* [Ha83], a *conectividade média*; a *coesão* (*cohesiveness*) [ABEHT81], o *mínimo  $m$ -grau* [BT70, CK89], a *persistência* de um grafo [BHK81, BP85, Pe84] e o *número de ligação* [Wo73]. Maiores investigações sobre essas medidas devem ser feitas, pois elas parecem apresentar um grande potencial de uso e pesquisa. Em especial, podemos citar o número de ligação de um grafo que foi apresentado por Woodall em [Wo73] e trata-se de um parâmetro cuja determinação é polinomial [Cu90], que mede o equilíbrio entre a cardinalidade do maior conjunto de vértices que pouco se conecta com o restante do grafo. Apesar da sua definição sugerir seu uso como um parâmetro de vulnerabilidade, não é exigido que o grafo seja desconectado, após a remoção dos vértices. Também, como outras medidas, como a resistência e o número de dispersão, essa é empregada no estudo da hamiltonicidade de um grafo [Ch95, RW00]. Vale considerar, no entanto, que ela tem merecido pouca atenção a nível de pesquisa, embora seja mais fácil de calcular que as outras nessa categoria.

Finalmente, aqui foi introduzida uma relação de ordem na família dos grafos com respeito a um  $q$ -operador constituído por  $q$  parâmetros de vulnerabilidade. Esta ordenação generaliza a definição clássica de comparação entre grafos segundo a conectividade de vértices [AH73, ST81]. A escolha dos parâmetros que compõem esse operador é fundamental para comparar a vulnerabilidade de pares de grafos e depende muito das características esperadas desses grafos que estão sendo avaliados. Em geral, é desejado que a rede seja resistente a falhas num subconjunto de seus vértices ou arestas, neste caso, o operador deve conter somente parâmetros sensíveis a essa característica, tais como a conectividade de vértices, a de arestas e a conectividade algébrica. Se a intenção for avaliar a vulnerabilidade de um grafo com respeito ao número de componentes conexas obtidas após a remoção de um subconjunto de vértices ou arestas então o operador deve conter a resistência de um grafo. Mas, se o objetivo é que tanto o número de elementos que falham (vértices ou arestas) e a ordem da maior componente conexa sejam simultaneamente pequenas então o operador deve ter a integridade como componente. Cabe ressaltar que não se deve colocar num mesmo operador parâmetros de natureza diferentes e às vezes opostas, porque assim os grafos serão sempre não comparáveis. Um estudo para identificar quais são os parâmetros mais adequados para compor um operador para as árvores (em especial, os caminhos e as estrelas) e para os grafos unicíclicos (destacando-se os ciclos) foi sugerido no Capítulo 6. No entanto, será preciso um trabalho de pesquisa bem consistente para ver se é válida a utilização de operadores como esses para comparação de grafos segundo a vulnerabilidade das redes que eles modelam. Essa é uma sugestão para futuras investigações.

# Referências

- [ABEHT81] Akiyama, J., Boesch, F.T., Era, H., Harary, F., Tindall, R. *The Cohesiveness of a Point of a Graph*. Networks, Vol. 11, 1981.
- [ASBS00] Amaral, L.A.N., Scala, A., Barthélemy, M., Stanley, H.E. *Classes of Small-World Networks*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 97 (2000), pp 11.149 – 11.152.
- [AH73] Amin, A.T., Hakimi, S.L. *Graphs with Given Connectivity and Independence Number or Networks with Given Measures of Vulnerability and Survivability*. IEEE Trans. on Circuit Theory, Vol. CT-20 (1973).
- [BBGLP92] Bagga, K.S., Beineke, L.W., Goddard, W.D., Lipman, M.J., Pippert, R.E. *A Survey of Integrity*. Discrete Applied Mathematics, 37/38 (1992), 13 – 28.
- [BBLP94] Bagga, K.S., Beineke, L.W., Lipman, M.J., Pippert, R.E. *Edge-integrity: a survey*. Discrete Mathematics, Vol. 124 (1994), pp 3 – 12.
- [BBLPS88] Bagga, K.S., Beineke, L.W., Lipman, M.J., Pippert, R.E., Sedlmeyer, R.L. *A good algorithm for the computation of the edge-integrity of trees*. Congr. Numer. 67, 1988, pp 225 – 232.
- [BBPL93] Bagga, K.S., Beineke, L.W., Pippert, R.E., Lipman, M.J. *A Classification Scheme for Vulnerability and Reliability Parameters of Graphs*. Mathl. Comput. Modelling, Vol. 17, No. 11, pp 13 – 16, 1993.
- [Ba04] Banks, W.A. *Neuroimmune networks and communication pathways: the importance of location*. Brain, Behavior, and Immunity, Vol. 18, Issue 2, 2004, pp 120 – 122.
- [BES87a] Barefoot, C.A., Entringer, R., Swart, H. *Vulnerability in Graphs - A Comparative Survey*. Math. Combin. Comput. 1, (1987), 12 – 22.
- [BES87b] Barefoot, C.A., Entringer, R., Swart, H. *Integrity of trees and powers of cycles*. Congr. Numer. 58, (1987), 103 – 114.

- [BW00] Barrat, A., Weigt, M. *On the Properties of Small World Networks*. Eur.Phys. J. B, 13 (2000), pp 547 – 560.
- [BBV00] Bauer, D., Broersma, H.J., Veldman, H.J. *Not every 2-tough graph is Hamiltonian*. Discrete Applied Mathematics, Vol. 99 (2000), pp 317 – 321.
- [BHS90] Bauer, D., Hakimi, S.L., Schmeichel, E. *Recognizing Tough Graphs is NP-Hard*. Discrete Applied Mathematics, 28 (1990), 191 – 195.
- [BAHO05] Belhaiza, S., Abreu, N.M.M., Hansen, P., Oliveira, C.S. *Variable Neighborhood Search for Extremal Graphs. Xi. Bounds on Algebraic Connectivity* in Graph Theory and Combinatorial Optimization. Edited by David Avis, Alain Hertz, Odile Marcotte. Springer, 2005.
- [Be73] Berge, C. *Graphes et Hypergraphes*. 2e. éd., Bordas, Paris, 1973.
- [Bi93] Biggs, N. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge, 1993.
- [Bo01] Boaventura Netto, Paulo Oswaldo. *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*. 2a. edição, Editora Blücher, São Paulo, 2001.
- [Bo86] Boesch, F.T. *Synthesis of reliable networks - A survey*. IEEE Trans. Reliable R-35, 240 – 246 (1986).
- [BHK81] Boesch, F.T., Harary, F., Kabell, R. *Graphs as Models of Communication Network Vulnerability: Connectivity and Persistence*. Networks, Vol. 11, 1981.
- [BT70] Boesch, F.T., Thomas, R.E. *On Graphs of Invulnerable Communication Nets*. IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-17, 1970.
- [BRST01] Bollobás, B., Riordan, O., Spencer, J., Tusnády, G. *The Degree Sequence of a Scale-Free Random Graph Process*. Random Structures Algorithms, 18 (2001), pp 279 – 290.
- [BP85] Bond, J., Peyrat, C. *Diameter Vulnerability in Networks*. Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science, Y. Alavi, G. Chartrand, L. Lesniak, D.R. Lick e C.E. Wall, eds, New York: Wiley, 1985.
- [BC01] Broida, A., Claffy, K.C. *Internet Topology: Connectivity of IP Graphs, in Scalability and Traffic Control in IP Networks*. Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science, S. Fahmy and K. Park, eds, Proc. SPIE 4526, International Society for Optical Engineering, Bellingham, WA, 2001, pp 172 – 187.

- [CCD90] Callioli, C., Costa, R.C.F., Domingues, H.H. *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*. 2a. edição, Editora Blücher, São Paulo, 2001.
- [Ca04] Casselman, B. *Networks*. Notices of the AMS, 51 (2004), pp 392 – 393.
- [CS90] Chang, K.-H., Santos, J.L.T. *Distributed design sensitivity computations on a network of computers*. Computers e Structures, Vol. 37, Issue 3, 1990, pp 265 – 275.
- [Ch95] Chen, C. *Binding number and toughness for matching extensions*. Discrete Mathematics, Vol. 146 (1995), pp 303 – 306.
- [CK89] Choi, M., Krishna, C.M. *On Measures of Vulnerability of Interconnection Network*. Microelectron. Reliab., Vol. 29, No. 6, pp 1011 – 1020, 1989.
- [CHE02] Chowell, G., Hyman, J.M., Eubank, S. *Analysis of a Real World Network: The City of Portland*. Technical Report BU-1604-M, Department of Biological Statistics and Computacional Biology, Cornell University, Ithaca, NY, 2002.
- [Ch73] Chvátal, V. *Tough Graphs and Hamiltonian Circuits*. Discrete Mathematics, Vol. 5, 1973.
- [CEF87] Clark, L.H., Entringer, R.C., Fellows, M. *Computational complexity of integrity*. J. Combin. Math. Combin. Comput., Vol. 2 (1987), pp 179 – 191.
- [Co87] Colbourn, Charles J. *The Combinatorics of Network Reliability*. Oxford University Press, New York, NY, 1987.
- [Cu90] Cunningham, W.H. *Computing the binding number of graph*. Discrete Applied Mathematics, 27 (1990), 283 – 285.
- [CDS79] Cvetkovic, D., Doob, M., Sachs, H., *Spectra of Graphs*. 3 ed. New York, Academic Press, 1979.
- [CDS95] Cvetkovic, D., Doob, M., Sachs, H., *Spectra of Graphs*. 1 ed. New York, Academic Press, 1995.
- [CR90] Cvetkovic, D., Rowlinson, P., *The Largest Eigenvalue of a Graph: A Survey*. Linear and Multilinear Algebra, vol. 28, pp. 3-33, 1990.
- [CRS97] Cvetkovic, D., Rowlinson, P., Simic, S., *Eigenspaces of Graphs*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 66, Cambridge, 1997.

- [Do89] Doty, Lynne L. *Extremal Connectivity and Vulnerability in Graphs*. Networks, Vol. 19 (1989), pp 73 – 78.
- [DWM02] Dunne, J.A., Williams, R.J., Martinez, N.D. *Food-web structure and network theory: The role of connectance and size*. Proceedings Of The National Academy Of Sciences Of The United States Of America, Vol. 99, Issue 20, 2002, pp 12.917 – 12.922.
- [ER90] Egghe, L., Rousseau, R. *Introduction to Informetrics*. Elsevier, Amsterdam, 1990.
- [EJKS85] Enomoto, H., Jackson, B., Katerinis, P., Saito, A. *Toughness and the existence of  $k$ -factors*. J. Graph Theory 9, 1985, pp 87 – 95.
- [ER59] Erdős, P., Rényi, A. *On Random Graphs*. Publ. Math. Debrecen, 6 (1959), pp 290 – 297.
- [ER60] Erdős, P., Rényi, A. *On the Evolution of Random Graphs*. Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl., 5 (1960), pp 17 – 61
- [FFF99] Faloutsos, M., Faloutsos, P., Faloutsos, C. *On Power-Law Relationships of the Internet Topology*. Computer Communications Rev., 29 (1999), pp. 251 – 262.
- [FW00] Fell, D., Wagner, A. *The Small World of Metabolism*. Nature Biotechnology, 18 (2000), pp 1121 – 1122.
- [FS89] Fellows, M.R., Stueckle, S. *The immersion order, forbidden subgraphs and the complexity of network integrity*. J. Combin. Math. Combin. Comput., Vol. 6 (1989), pp. 23 – 32.
- [Fi73] Fiedler, M. *Algebraic Connectivity of Graphs*. Czechoslovak Math J., Vol. 23 (1973), pp 298 – 305.
- [FF71] Frank, H., Frisch, I.T. *Communication, Trasmision and Transportation Networks*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1971.
- [Ga87] Gait, J. *A distributed process manager for an engineering network computer*. Journal of Parallel and Distributed Computing, Vol. 4, Issue 4, 1987, pp 423 – 437.
- [GRT97] Giakoumakis, V., Roussel, F., Thuillier, H. *Scattering number and modular decomposition*. Discrete Mathematics, Vol. 165/166 (1997), pp 321 – 342.
- [Go89] Goddard, W. *On the Vulnerability of Graphs*. Ph.D. thesis, University of Natal, Durban, S.A., 1989.

- [GS90a] Goddard, W., Swart, H.C. *Integrity in graphs: Bounds and basics*. J. Combin. Math. Combin. Comput., Vol. 7 (1990), pp 139 – 151.
- [GS90b] Goddard, W., Swart, H.C. *On the toughness of a graph*. Quaestiones Math. 13, 1990, pp 217 – 232.
- [GR01] Godsil, C., Royle, G. *Algebraic Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics, GTM 207, Springer, 2001.
- [GL00] Goldberg, M.C., Luna, H.P.L. *Otimização Combinatória e Programação Linear*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 2000.
- [Go88] Gould, R., *Graph Theory*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1988.
- [GK77] Gupta, J.N.D., Krajewski, L.J. *Operations research in postal services: a survey*. Computers and Operations Research, Vol. 4 (1977), pp 235 – 246.
- [HA73] Hakimi, S.L., Amin, A.T. *On the Design of Reliable Networks*. Networks, Vol. 3, 1973, 241 – 260.
- [HO94] Hao, J., Orlin, J. B. *A faster algorithm for finding the minimum cut in a directed graph*. J. Algorithms, 17 (1994), pp 424 – 446.
- [Ha69] Harary, F. *Graph Theory*. Addison-Wesley, Reading, Mass, 1969.
- [Ha83] Harary, F. *Conditional Connectivity*. Networks, Vol. 13, 1983.
- [Ha84] Harary, F. *General Connectivity*. Graph Theory. K.M. Koh e H.P. Yap, editores, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1013, Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [Ha95] Harary, F. *Graph Theory*. Perseus, Cambridge, MA, 1995.
- [He88] Hendry, G.R.T. *Scattering Number and extremal non-Hamiltonian graphs*. Discr. Math., 71 (1988), 165 – 175.
- [HRG00] Henzinger, M.R., Rao, S., Gabow, H.N. *Computing Vertex Connectivity: New Bounds from Old Techniques*. Journal of Algorithms, 34 (2000), 222 – 250.
- [He99] Heuvel, J. *On the Edge-Connectivity, Hamiltonicity, and Toughness of Vertex-Transitive Graphs*. J. Combin. Theory, Series B, Vol. 77 (1999), pp 138 – 149.
- [Ho95] Hoàng, C.H. *Hamiltonian degree conditions for tough graphs*. Discr. Math., Vol. 142 (1995), pp 121 – 139.

- [Hu01] Huberman, B.A. *The Laws of the Web*. MIT Press, Cambridge, MA, 2001.
- [JKS82] Jamrozik, J., Kalinowski, R., Skupień, Z. *A catalogue of small maximal non-Hamiltonian graphs*. *Discr. Math.*, 39 (1982), 229 – 234.
- [JTAOB00] Jeong, H., Tombor, B., Albert, R., Oltvai, Z.N., Barabási, A.-L. *The Large-Scale Organization of Metabolic Networks*. *Nature*, 407 (2000), pp 651 – 654.
- [Ju78] Jung, H.A. *On a class of posets and the corresponding comparability graphs*. *J. Combin. Theory Ser. B*, Vol. 24 (1978), pp 125 – 133.
- [KSM03] Kalapala, V.K., Sanwalani, V., Moore, C. *The Structure of the United States Road Network*, University of New Mexico, Albuquerque, 2003.
- [Ka82] Karoński, M. *A review of Random Graphs*. *J. Graph Theory*, 6 (1982), pp 349 – 389.
- [Ka97] Katona, G.Y. *Toughness and edge-toughness*. *Discrete Mathematics*, Vol. 164 (1997), pp 187 – 196.
- [Ke65] Kel'mans, A.K. *The number of trees in a graph*. I *Automat. i Telemekh.* 26 (1965) 2194-2204 (in Russian); transl. *Automat. Remote Control* 26 (1965) pp 233 – 241.
- [Ke66] Kel'mans, A.K. *The number of trees in a graph*. II *Automat. i Telemekh.* 27 (1966) 55-65 (in Russian); transl. *Automat. Remote Control* 27 (1966) pp 233 – 241.
- [KKRRT99] Kleinberg, J.M., Kumar, S.R., Raghavan, P., Rajagopalan, S., Tomkins, A. *The Web as a Graph: Measurements, Models and Methods*. *Proceedings of the International Conference on Combinatorics and Computing*, Lecture Notes in Comput. Sci. 1627, Springer-Verlag, Berlin, 1999, pp 1 – 18.
- [KKM94] Kratsch, D., Kloks, T., Müller, H. *Computing the toughness and scattering number on interval and other graphs*. Publication Interne no. 806, March 1994, IRISA Rennes, France.
- [KLM96] Kratsch, D., Lehel, J., Müller, H. *Toughness, hamiltonicity and split graphs*. *Discrete Mathematics*, Vol. 150 (1996), pp 231 – 245.
- [LP86] Lovfisz, L., Plummer, M.D. *Matching Theory*. Budapest, 1986.
- [MS91] Marczyk, A., Skupień, Z. *Maximum nonhamiltonian tough graphs*. *Discrete Mathematics*, 96 (1991), pp 213 – 220.

- [Ma75] Mariolis, P. *Interlocking Directorates and Control of Corporations: The Theory of Bank Control*. Social Sci. Quart., 56 (1975), pp 425 – 439.
- [Me94] Merris, R. *Laplacian Matrices of Graphs: A Survey*. Linear Algebra Appl., 197/198, pp 143 – 176, 1994.
- [MR92] Michaels, J.G., Rosen, K.H. *Applications of Discrete Mathematics*. McGraw-Hill International Editions, 1992.
- [Mo34] Moreno, J.L. *Who Shall Survive?*. Beacon House, Beacon, NY, 1934.
- [Ne03] Newman, M.E.J. *The Structure and Function of Complex Networks*. SIAM Review, Vol. 45, N° 2, 2003, pp 167 – 256.
- [NG56] Nordhaus, E.A., Gaddum, J.W. *On complementary graphs*. Amer. Math. Monthly. 63, 1956, pp 175 – 177.
- [Ol03] Oliveira, C.S. *Laplaciano de Grafos e Vulnerabilidade de Redes*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, 2003.
- [PA93] Padgett, J.F., Ansell, C.K. *Robust Action and the Rise of the Medici, 1400-1434*. Amer. J. Sociol., 98 (1993), pp 1259 – 1319.
- [Pe84] Peyrat, C. *Diameter Vulnerability of Graphs*. Discrete Applied Mathematics, Vol. 9, 1984.
- [Ra57] Rapoport, A. *Contribution to the Theory of Random and Biased Nets*. Bull. Math. Biophys., 19 (1957), pp 257 – 277.
- [RW00] Robertshaw, A.M., Woodall, D.R. *Triangles and Neighbourhoods of Independent Sets in Graphs*. J. Combin. Theory, Series B, Vol. 80 (2000), pp 122 – 129.
- [Sc00] Scott, J. *Social Networks Analysis: A Handbook*. 2nd ed., Sage, London, 2000.
- [Sm84] Smith, D. *Graphs with the Smallest Number of Minimum Cut Sets*. Networks, Vol. 14, 1984.
- [Sp02] Sporns, O. *Network Analysis, Complexity, and Brain Function*. Complexity, 8 (2002), pp 56 – 60.
- [ST81] Swamy, M. N. S.; Thwlasiraman, K., *Graphs, Networks and Algorithms*, (1981).
- [Ta75] Tainiter, M. *Statistic Theory of Connectivity: Basic Definitions and Properties*. Discrete Mathematics, Vol. 13, 1975.

- [Ta76] Tainiter, M. *A New Deterministic Network Reliability Measure*. Discrete Mathematics, Vol. 6, 1976.
- [VF72] Van Slyke, R.M., Frank H. *Network reliability analysis I*. Networks, Vol. 1, pp 279 – 290, 1972.
- [VY04] Veeravalli, B., Yao, J. *Divisible load scheduling strategies on distributed multi-level tree networks with communication delays and buffer constraints* Computer Communications, Vol. 27, Issue 1, 2004, pp 93 – 110.
- [WF01] Wagner, A., Fell, D. *The Small World Inside Large Metabolic Networks*. Proc. Roy. Soc. London Ser. B, 268 (2001), pp 1803 – 1810.
- [Wa92] Wang, Z. *The circumference of self-complementary graphs*. J. Shaanxi Tech Instit 8 (2) (1992), pp 78 – 83.
- [WF94] Wasserman, S., Faust, K. *Social Network Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1994.
- [Wa99] Watts, D.J. *Small Worlds*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999.
- [WS98] Watts, D.J., Strogatz, S.H. *Collective Dynamics of “Small World” Networks*. Nature, 393 (1998), pp 440 – 442.
- [WBE99] West, G.B., Brown, J.H., Enquist, B.J. *A General Model for the Structure, and Allometry of Plant Vascular Systems*. Nature, 400 (1999), pp 664 – 667.
- [WSTB86] White, J.G., Southgate, E., Thompson, J.N., Brenner, S. *The Structure of the Nervous System of the Nematode C. Elegans*. Philos. Trans. Roy. Soc. London, 314 (1986), pp 1 – 340.
- [Wh32] Whitney, H. *Congruent graphs and the connectivity of graphs*. Amer. J. Math., Vol. 54 (1932), pp 150 – 168.
- [WGMV95] Williamson, D.P., Goemans, M.X., Mihail, M., Vazirani, V.V. *A primal-dual approximation algorithm for generalized Steiner Network Problem*. Combinatorica, 15 (1995), 435-454.
- [Wo73] Woodall, D.R. *The Binding Number of a Graph and its Anderson Number*. J. Combin. Theory Ser. B, Vol. 15 (1973), pp 225 – 255.
- [ZW01] Zhang, S., Wang, Z. *Scattering Number in Graphs*. Networks, Vol. 37 (2), 2001, pp 102 – 106.