



## UTILIZAÇÃO DE SISTEMA MULTISTÁTICO PARA COBERTURA ACÚSTICA SUBMARINA EM REGIÕES DA COSTA BRASILEIRA

Marcela Stein

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Orientadores: Virgílio José Martins Ferreira  
Filho  
Juan Pablo Cajahuanca Luna

Rio de Janeiro  
Abril de 2023

UTILIZAÇÃO DE SISTEMA MULTISTÁTICO PARA COBERTURA  
ACÚSTICA SUBMARINA EM REGIÕES DA COSTA BRASILEIRA

Marcela Stein

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO  
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE  
ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO  
PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU  
DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO.

Orientadores: Virgílio José Martins Ferreira Filho  
Juan Pablo Cajahuanca Luna

Aprovada por: Profa. Laura Silvia Bahiense da Silva Leite  
Dr. Leonardo Antonio Monteiro Pessôa

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
ABRIL DE 2023

Stein, Marcela

Utilização de sistema Multistático para Cobertura Acústica Submarina em Regiões da Costa Brasileira/Marcela Stein. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2023.

XIV, 82 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Virgílio José Martins Ferreira Filho

Juan Pablo Cajahuanca Luna

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Produção, 2023.

Referências Bibliográficas: p. 77 – 82.

1. Sistema de Sonar Multistático. 2. Modelagem Matemática. 3. Heurísticas. I. Ferreira Filho, Virgílio José Martins *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Produção. III. Título.

*“Não sou nada.  
Nunca serei nada.  
Não posso querer ser nada.  
À parte isso, tenho em mim  
todos os sonhos do mundo.”*  
*Fernando Pessoa*

# Agradecimentos

Aos professores Virgílio Ferreira Filho e Juan Pablo Cajahuanca Luna pela cordialidade, paciência, atenção que sempre me dispensaram e por todo o conhecimento transmitido.

À Marinha do Brasil e o Centro de Análise de Sistemas Navais pela oportunidade de realizar este curso.

Ao meu orientador técnico da Marinha do Brasil, CMG Fernando, pela cordialidade e apoio durante essa trajetória.

Aos amigos do Grupo de Sistemas Acústicos Submarino, em especial, ao Fábio, ao Corrêa, à Cátia, ao Fabiano e ao William que contribuíram de forma direta no desenvolvimento deste trabalho.

À amiga Cris e à amiga Ananda, por terem me apoiado a realizar o mestrado e por acompanharem quase que diariamente nessa caminhada.

A minha irmã Mariana, a minha irmã Tati, a minha mãe Ângela e ao meu pai Renato, pelo apoio e incentivo que sempre me deram nos estudos e em todos os momentos da minha vida.

Por fim, ao meu namorado Leo, pela paciência, pelo carinho, por me escutar falar do mestrado diariamente. Sem esse apoio, os dois anos de curso teriam sido muito mais difíceis.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## UTILIZAÇÃO DE SISTEMA MULTISTÁTICO PARA COBERTURA ACÚSTICA SUBMARINA EM REGIÕES DA COSTA BRASILEIRA

Marcela Stein

Abril/2023

Orientadores: Virgílio José Martins Ferreira Filho  
Juan Pablo Cajahuanca Luna

Programa: Engenharia de Produção

Este trabalho realiza um estudo sobre cobertura acústica submarina de regiões da costa brasileira através do emprego de sistema de sornar ativo multistático. Inicialmente foram aplicados quatro modelos matemáticos, sendo dois de cobertura total e dois de cobertura parcial. Os modelos distinguem entre si pela forma como é calculado a probabilidade de cobertura dessas regiões, podendo ser usado um modelo de sensor *Cookie-Cutter* ou um modelo de sensor probabilístico. Ao verificar que o modelo de cobertura parcial probabilístico é o mais vantajoso para as regiões estudadas, foram aplicados os conceitos de dualidade e Relaxação Lagrangiana para obter melhores resultados. Em seguida, foram desenvolvidos uma Heurística Gulosa, uma Heurística de Troca e um *Simulated Annealing* para obter soluções com melhores tempo computacional e fornecer resultados de cobertura de regiões com escalas de melhores resoluções, ou seja, de *grids* mais densos.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

USE OF A MULTISTATIC SYSTEM FOR UNDERWATER ACOUSTIC  
COVERAGE IN REGIONS OF THE BRAZILIAN COAST

Marcela Stein

April/2023

Advisors: Virgílio José Martins Ferreira Filho

Juan Pablo Cajahuanca Luna

Department: Production Engineering

This work conducts a study on underwater acoustic coverage of regions of the Brazilian coast using a multistatic active sonar system. Initially, four mathematical models were applied, two for total coverage and two for partial coverage. The models differ in the way the probability of coverage of these regions is calculated, and a Cookie-Cutter sensor model or a probabilistic sensor model can be used. Finding that the probabilistic partial coverage model is the most advantageous for the regions studied, the concept of duality and Lagrangian Relaxation were applied to obtain better results. Then, a Greedy Heuristic, an Exchange Heuristic and a Simulated Annealing were developed to obtain solutions with better computational time and provide a covering results for regions with better resolution scales, that is, denser grids.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xii</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Justificativa e Motivação . . . . .	3
1.2 Objetivo . . . . .	5
1.2.1 Objetivos Secundários . . . . .	5
1.3 Estrutura . . . . .	5
<b>2 Revisão Bibliográfica</b>	<b>7</b>
2.1 Problemas de Cobertura . . . . .	7
2.2 Sonar . . . . .	10
2.2.1 Modelo de Sensores . . . . .	13
2.2.2 Cobertura Acústica em Sistema de Sonar Multistático . . . . .	16
<b>3 Descrição do Problema</b>	<b>18</b>
<b>4 Modelagem Matemática</b>	<b>23</b>
4.1 Modelos de Cobertura Submarina . . . . .	23
4.1.1 Modelo Cobertura Total de Detecção <i>Cookie Cutter</i> (CTCC) . . . . .	24
4.1.2 Modelo Cobertura Parcial de Detecção <i>Cookie Cutter</i> (CPCC) . . . . .	26
4.1.3 Modelo Cobertura Total de Detecção Probabilístico (CTPRB) . . . . .	27
4.1.4 Modelo Cobertura Parcial de Detecção Probabilístico (CPPRB) . . . . .	28
4.1.5 Comparação entre os Modelos . . . . .	28
<b>5 Métodos de Resolução Não Linear</b>	<b>30</b>
5.1 Relaxação Lagrangiana e Dualidade . . . . .	30
5.2 Método de Feixes . . . . .	31
5.3 Método de Feixe para Solução do Problema Dual . . . . .	33



5.4	Método de Feixe para Solução do Problema Dual com Lagrangeano Sharp . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Heurísticas</b>	<b>36</b>
6.1	Heurística Gulosa . . . . .	36
6.1.1	Heurística Gulosa Randômica (HGR) . . . . .	37
6.2	Heurística de Trocas . . . . .	38
6.2.1	Heurística de Trocas para o Problema de Cobertura . . . . .	38
6.3	<i>Simulated Annealing</i> . . . . .	41
6.4	<i>Simulated Annealing</i> para o Problema de Cobertura . . . . .	42
6.4.1	Temperatura Inicial . . . . .	43
6.4.2	Programa de Resfriamento . . . . .	43
6.4.3	Critério de Parada . . . . .	44
6.4.4	Probabilidade de Escolha de um Movimento . . . . .	45
6.4.5	Algoritmo <i>Simulated Annealing</i> . . . . .	45
6.5	Busca local . . . . .	46
6.5.1	Processamento Paralelo . . . . .	47
<b>7</b>	<b>Resultados e Discussões</b>	<b>50</b>
7.1	Comparação Entre Modelos . . . . .	50
7.1.1	Comparação dos Modelos de Cobertura Total . . . . .	51
7.1.2	Comparação dos Modelos de Cobertura Parcial . . . . .	55
7.2	Melhoria dos resultados do Modelo CPPROB . . . . .	60
7.2.1	Solução do Problema Dual . . . . .	60
7.2.2	Solução da Função Dual com Lagrangeano Sharp . . . . .	61
7.3	Heurística Gulosa Randômica . . . . .	62
7.4	Heurística de Troca e <i>Simulated Annealing</i> . . . . .	65
7.4.1	Desempenho dos Movimentos da Busca Local . . . . .	70
7.5	Comparação entre os Métodos . . . . .	71
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>75</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>77</b>

# Lista de Figuras

1.1	Comparação entre Sistema Monostático e Multistático . . . . .	2
1.2	Amazônia Azul . . . . .	3
1.3	Sistema de Gerenciamento da Amazônia Azul . . . . .	4
2.1	Curva de Cassini . . . . .	13
2.2	Zona Cega . . . . .	14
2.3	Curvas de Probabilidade de Detecção . . . . .	15
3.1	Regiões de Estudo . . . . .	19
3.2	Mapa Dividido por Sub-regiões . . . . .	19
3.3	Escalas da Área 1 . . . . .	20
3.4	Escalas da Área 2 . . . . .	21
4.1	Diferença entre Ilhas e Canais . . . . .	25
4.2	Etapas de Comparação entre os Modelos . . . . .	28
6.1	Comparação do Desempenho Utilizando Probabilidades Iguais e Diferentes . . . . .	40
6.2	Etapas do Processo Realizado pelos Movimento da Busca Local . . . . .	47
6.3	Processo Sequencial . . . . .	48
6.4	Processo Paralelo . . . . .	49
6.5	Diferença de Tempo entre Processo Sequencial e Processo Paralelo dos Movimentos . . . . .	49
7.1	Gráficos de Comparação dos Modelos de Cobertura Total para as Diferentes Áreas . . . . .	53
7.2	Comparação dos Modelos na Área 1 para um <i>RoD</i> de 800 m. . . . .	54
7.3	Comparação dos modelos na Área 2 para um <i>RoD</i> de 800 m. . . . .	55
7.4	Gráficos de Comparação dos Modelos de Cobertura Parcial . . . . .	56
7.5	Comparação dos Modelos para a Área 1, <i>RoD</i> de 700m e 30% do Custo Total. . . . .	59

7.6	Comparação dos modelos para a Área 2, RoD de 900m e 40% do Custo Total. . . . .	60
7.7	Valor de $N$ e o Desempenho da HGR . . . . .	63
7.8	Valor de $N$ e o Desempenho do SA . . . . .	63
7.9	Comparação da HGR e o Otimizado para a Área 1, Escala de 1:500 m	64
7.10	Comparação da HGR e o Otimizado para a Área 2, Escala de 1:300 m	64
7.11	Comparação do Critério para aceitar uma Solução . . . . .	66
7.12	Comparação, em forma de <i>Box-Plot</i> , entre HT e SA para o Peso de Cobertura . . . . .	68
7.13	Comparação de <i>Box-Plot</i> entre HT e SA para o Tempo de Execução .	69
7.14	Comparação de Cobertura para Diferentes Quantidades de Fontes e Receptores . . . . .	70
7.15	Comparação do Desempenho dos Movimentos . . . . .	71
7.16	Escala 1:500 m . . . . .	72
7.17	Escala 1:300 m . . . . .	72
7.18	Escala 1:200 m . . . . .	72
7.19	Escala 1:100 m . . . . .	73
7.20	Melhores Coberturas para a Área 1 . . . . .	73
7.21	Melhores coberturas para a Área 2 . . . . .	74

# Lista de Tabelas

2.1	Parâmetros da Equação Sonar . . . . .	11
4.1	Parâmetros e Conjunto . . . . .	24
4.2	Variáveis de Decisão . . . . .	24
7.1	Parâmetros por Sub-região . . . . .	51
7.2	Resumo Modelos de Cobertura Total . . . . .	51
7.3	Resultado dos Modelos CTPRB e CTCC para Área 1 . . . . .	52
7.4	Resultado dos Modelos CTPRB e CTCC para Área 2 . . . . .	52
7.5	Resumo Modelos de Cobertura Parcial . . . . .	55
7.6	Resultados Comparação dos Modelos Parciais para a Área 1 . . . . .	57
7.7	Resultados Comparação dos Modelos Parciais para a Área 2 . . . . .	58
7.8	Parâmetros Método de Feixe . . . . .	61
7.9	Parâmetros Método de Feixe Para o Problema Dual com Lagrangeano Sharp . . . . .	61
7.10	Área 2 Lagrangeano Sharp . . . . .	62
7.11	Resultado HGR para Área 1 . . . . .	63
7.12	Resultado HGR para Área 2 . . . . .	64
7.13	Resultado HGR + Otimizador para Área 1 . . . . .	65
7.14	Resultado HGR + Otimizador para Área 2 . . . . .	65
7.15	Heurística de Troca Área 1 . . . . .	66
7.16	Heurística de Troca Área 2 . . . . .	66
7.17	<i>Simulated Annealing</i> Área 1 . . . . .	67
7.18	<i>Simulated Annealing</i> Área 2 . . . . .	67

# Lista de Símbolos

$x_k$	Centro de estabilização do problema do Método de Feixes, p. 32
$C^r$	Custo de instalação de um receptor, p. 24
$C^s$	Custo de instalação de uma fonte, p. 24
$D_k$	Probabilidade mínima de detecção de um alvo, p. 24
<i>Escala</i>	Escala adotada, p. 24
$M_k$	Peso do quadrado $k$ , para $k \in G$ , p. 24
$N$	Número de tentativas de posicionar um receptor vinculado a uma fonte, p. 38
$P_{rst}$	Probabilidade de detecção de um alvo $t$ por uma fonte $s$ e um receptor $r$ , p. 13
$P_t$	Probabilidade de detecção de um alvo $t$ , p. 14
<i>Passo</i>	Número máximo de quadrados em que alguns movimentos da busca local podem se deslocar, p. 40
$Prob_{Max}$	Valor máximo de probabilidade de detecção da região em estudo, p. 24
$T_0$	Temperatura inicial do <i>Simulated Annealing</i> , p. 43
$V$	Limite orçamentário, p. 38
$\alpha$	Taxa de resfriamento do <i>Simulated Annealing</i> , p. 44
$\gamma_k$	Parâmetro estabilizador do Método de Feixes, p. 32
$\mu$ e $\lambda$	Variáveis duais, p. 31
$\rho_0, RoD$	O alcance definido de um sonar para uma probabilidade de 50% de detecção, p. 13

$\rho_{str}$	O alcance definido de um sonar, p. 12
<i>conjuntos</i>	Conjuntos de quadrados que formam um canal e estão entre dois quadrados de terra, p. 24
$d_{sr}$	Distância da fonte s até o receptor r, p. 12
$d_{st}$	Distância da fonte s até o alvo t, p. 12
$d_{tr}$	Distância do alvo t até o receptor, p. 12
$matriz_{pos}$	Matriz contendo os quadrados da região em estudo, p. 24
$matriz_{pri}$	Matriz contendo prioridade de detecção de cada quadrado, p. 24
<i>prob</i>	Valores de probabilidade mínima de cobertura para as sub-regiões, p. 38
$y_k$	Gradiente da função de aproximação do Método de Feixes no ponto $z_k$ , p. 32
$z_k$	Solução da função de aproximação do Método de Feixes, p. 32

# Capítulo 1

## Introdução

A acústica submarina é uma área que tem ganhado relevância nos últimos séculos e que, cada vez mais, vem sendo estudada, pois a propagação do som em meios submarinos é um tema complexo e de grande importância. Compreender esse assunto é fundamental em diversas áreas, como detecção sísmica, atividade pesqueira, monitoramento ambiental, comunicação submarina e atividades militares de vigilância e monitoramento em meios submarinos.

Para atividades militares, a acústica submarina desempenha um papel relevante em sistemas de defesa, pois tem entre suas finalidades a detecção de ameaças. O principal equipamento utilizado para identificar um elemento indesejável em áreas subaquáticas é o sonar. Esse dispositivo pode ser utilizado tanto para manutenção da soberania e proteção de riquezas de um país, quanto em períodos de guerras. Conforme D'AMICO e PITTENGER (2009), em diversos momentos da história, foi relatado o emprego de sonares para detecção de submarinos, como na Primeira Guerra Mundial, na Segunda Guerra Mundial e na Guerra Fria. Para CABRAL (2020), a participação do Brasil na batalha do Atlântico, realizada durante a Segunda Guerra Mundial, foi marcada por atividades de vigilância contra submarinos alemães e atividades de patrulhas navais. O emprego dos meios, oriundos da Marinha do Brasil (MB), foi fundamental para a execução dessas atividades, sendo que os navios mais modernos eram equipados com sonares.

O sonar é um dispositivo que tem como finalidade detectar e localizar objetos que estejam em regiões submarinas através da propagação de ondas sonoras que são refletidas ou produzidas por um alvo (URICK, 1983). Um sonar pode ser classificado em passivo ou ativo. No passivo, o dispositivo recebe o eco da onda sonora transmitida por um alvo. Sua função consiste em “escutar” um ruído. O ativo é composto de uma fonte (ativo) e um receptor (passivo), no qual a fonte emite um *ping* (pulso) que atinge um alvo, esse reflete o pulso que é detectado pelo receptor.

Quando se pretende monitorar uma área submarina com a finalidade de detectar ameaça, o maior desafio é saber em que posições geográficas deve-se posicionar um

ou mais sonares. O principal objetivo é obter a maior probabilidade de detecção de um alvo na região de interesse. Esse tipo de problema de cobertura pode ser dividido em duas categorias: a primeira considera uma disponibilidade limitada de equipamentos e pretende-se maximizar a cobertura; na segunda categoria, pretende-se cobrir toda a região de interesse minimizando o custo total de cobertura.

Em problemas de cobertura acústica submarina para detecção de ameaças, podem ser utilizados dois tipos de sistemas compostos por sonar ativo, conforme apresentado na Figura 1.1. O sistema pode ser monostático, compostos por sonares monostáticos, em que a fonte e receptor estão localizados na mesma posição. O outro sistema é o multistático, nesse as fontes e receptores podem estar separados por uma distância e a quantidade de fonte não necessita ser igual ao número de receptores. Esse sistema é composto por sonares distáticos, em que um conjunto de fontes e receptores estão separados por uma distância. (CRAPARO *et al.*, 2018, 2017).

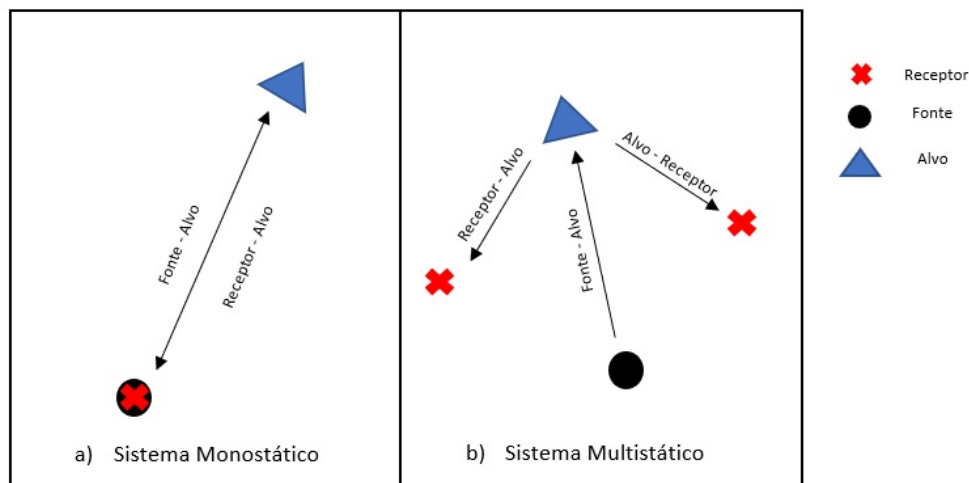


Figura 1.1: Comparação entre Sistema Monostático e Multistático

Nos últimos anos, o sistema multistático vem ganhando destaque, pois apresenta vantagens financeiras, táticas e menor impacto ambiental em comparação ao Monostático (CRAPARO *et al.*, 2017; HOF, 2015). Entretanto, a principal desvantagem em utilizar o multistático é a dificuldade em se obter a probabilidade de detecção de um alvo, pois essa varia conforme a distância do alvo até a fonte, do receptor até o alvo e o distanciamento entre fonte e receptor (CRAPARO *et al.*, 2017).

O presente estudo tem como finalidade analisar a cobertura acústica em regiões da costa brasileira empregando um sistema de sonar multistático. No trabalho são consideradas restrições de custo, que impedem que a região seja toda coberta. Nas áreas avaliadas, são considerados dois fatores relevantes que serão fundamentais para



definir a cobertura da área de interesse. O primeiro consiste em definir a região por sub-regiões seguindo uma prioridade de cobertura. O segundo, classifica essas sub-regiões por distintas ou iguais probabilidade mínima de detecção de um alvo.

## 1.1 Justificativa e Motivação

As Águas Jurisdicionais Brasileiras (AJB), integradas pela região marítima do país e delimitadas pela plataforma continental, abrangem 5.7 milhões  $km^2$  e 60.000  $km$  de hidrovias. Essa região é conhecida como Amazônia Azul, Figura 1.2, e apresenta alta relevância econômica, política, estratégica e ambiental. Nessa região estão as principais reservas de petróleo e gás natural brasileiro. Também é importante para importação e exportação de bens, pois 90% do volume desses ocorrem por meio marítimo. Por fim, as AJB são constituídas por uma vasta biodiversidade (RODRIGUES, 2021).



Figura 1.2: Amazônia Azul

Visto que o território abrangido pela Amazônia Azul é extenso e de extrema importância ao Brasil, o monitoramento e vigilância dessa região são atividades complexas. A Marinha do Brasil (MB) iniciou em 2009 o Sistema de Gerenciamento da Amazônia Azul (SisGAAz), Figura 1.3. Esse é um programa que tem como objetivo realizar o controle e monitoramento das águas de domínio e responsabilidade

nacional por meio de um conjunto de sistemas, como por exemplo: satélites, radares e equipamentos de sensoriamento (ANDRADE *et al.*, 2019). O estudo proposto nesse presente trabalho está alinhado aos interesses da Marinha do Brasil. A utilização de um sistema multistático em regiões de importância para o Brasil poderia ser mais uma forma de contramedida às ameaças em Águas Jurisdicionais Brasileiras, além de, futuramente, poder ser incorporado ao SisGAAz.

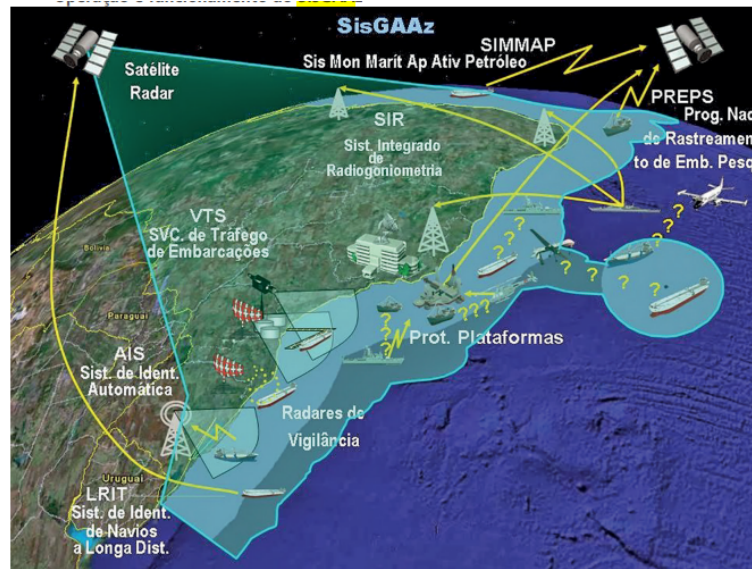


Figura 1.3: Sistema de Gerenciamento da Amazônia Azul

Há alguns anos o sistema de sonar multistático vem sendo empregado e estudado por alguns países, principalmente quando o assunto envolve guerras antissubmarinos e contramedidas a essas ameaças. BOWEN e MITNICK (1999) afirmam que, em resposta à ameaça de submarinos elétricos, o Programa de Guerra Antissubmarino em Águas Rasas foi inicializado pela Agência de Projetos de Pesquisa Avançada (DARPA) dos Estados Unidos. Por meio desse programa, desenvolveu-se a metodologia para previsão de desempenho multistático, que buscava definir o número ideal de fontes e a frequência de *ping* que deveria ser adotado para obter a melhor probabilidade de detecção de um submarino elétrico.

Outro país que vem aprimorando o seu conhecimento sobre sonar multistático para guerra antissubmarino é a Austrália. A Organização de Ciência e Tecnologia de Defesa da Austrália emitiu um relatório em que realizou a análise das vantagens em utilizar o sonar multistático para acompanhamento e detecção de um submarino. O documento comparou esse sistema com o sistema monostático. Então, foi observado que ao utilizar um modelo probabilístico de detecção (função exponencial), o sistema multistático apresentava vantagens significativas (FEWELL e OZOLS, 2011).

## 1.2 Objetivo

O principal objetivo desse trabalho é realizar um estudo que visa a maximizar a cobertura acústica submarina de regiões pré-definidas da costa brasileira, considerando que os locais de estudos são divididos em sub-regiões, que são categorizadas conforme prioridade de cobertura. Esse estudo é um Problema de Localização de Máxima Cobertura (do inglês *Maximal Covering Location Problem*, MCLP), em que se pretende definir a posição dos sensores de um sistema de sonar ativo multistático, tendo como principal restrição o limite orçamentário para o emprego dos sensores.

### 1.2.1 Objetivos Secundários

A seguir são listados os objetivos secundários do trabalho:

- Realizar uma comparação entre os modelos que utilizam modelo de sensor Probabilístico e modelo de sensor *Cookie-Cutter*, com o objetivo de identificar qual modelo obtém melhor cobertura para as regiões em estudo;
- Analisar as vantagens e as consequências de se empregar diferentes probabilidades mínimas de detecção nas sub-regiões;
- Realizar a análise dos resultados computacionais da cobertura acústica para diferentes escalas do mapa das áreas de estudo;
- Identificar, entre os métodos utilizados, quais apresentam melhores resultados computacionais, considerando melhor cobertura e melhor tempo de execução.

## 1.3 Estrutura

O trabalho foi estruturado em oito capítulos. O primeiro é a Introdução, onde são apresentados os comentários iniciais sobre o tema estudado. Em seguida é exibida a justificativa e a motivação desse trabalho, seus objetivos principal e secundários. Por fim, é apresentada a estrutura adotada neste documento.

O segundo capítulo, Revisão Bibliográfica, consiste em realizar uma revisão da literatura, apresentando os principais conceitos, que serão fundamentais para a compreensão e execução deste trabalho. Também são expostos exemplos de estudos que empregaram esses conceitos.

O terceiro capítulo, Descrição do Problema, apresenta o problema a ser estudado e as premissas adotadas neste trabalho.

O quarto capítulo, Modelagem Matemática, apresenta os quatro modelos matemáticos utilizados no presente estudo, sendo dois modelos focados para a cobertura total das regiões em estudo e dois de coberturas parciais.

No quinto capítulo, Métodos de Resolução Não Linear, é apresentado o Método de Feixes empregado para resolver o problema do limite superior do modelo de cobertura parcial probabilístico. Outro método explicado é o Lagrangeano Sharp, aplicado para obter melhores resultado ao mesmo modelo.

No sexto capítulo, Heurísticas, são apresentados três algoritmos desenvolvidos: uma Heurística Gulosa Randômica, uma Heurística de Trocas e um Recozimento Simulado. As três heurísticas têm como finalidade resolver o problema de cobertura parcial probabilístico.

O sétimo capítulo, Resultados e Discussões, apresenta o experimento computacional e as análises realizadas, com o objetivo de verificar o melhor método de resolução do problema.

O oitavo e último capítulo, Conclusões, apresenta um resumo do trabalho, bem como os melhores resultados obtidos. Nesse capítulo, são sugeridos novos trabalhos relacionados ao tema que foi estudado.

# Capítulo 2

## Revisão Bibliográfica

Nesta seção são ilustrados os conceitos básicos da literatura, os quais foram essenciais para o desenvolvimento e execução desse trabalho. Inicialmente, são apresentados os conceitos, modelos básicos e exemplos do Problema de Cobertura de Conjunto e do Problema de Localização de Máxima Cobertura, dois problemas muito estudados em Pesquisa Operacional. Em seguida, é realizada uma breve apresentação sobre o sonar e sua história. Também são apresentadas as diferenças entre um sistema de sonar monostático e multistático. Então, são aprofundados os conceitos que são fundamentais para modelar um sistema de sonar multistático. Por fim, são mostrados alguns trabalhos empregando um sistema multistático e os resultados obtidos pelos autores.

### 2.1 Problemas de Cobertura

Os problemas de localização de cobertura são muito encontrados em diversas situações reais do cotidiano. Esses problemas podem ser divididos em duas categorias: Problema de Cobertura de Conjunto (PCC) e Problema de Localização de Máxima Cobertura (PLMC) (CURRENT, 1990).

Para CURRENT (1990) e CHURCH e REVELLE (1974), o Problema de Cobertura de Conjunto tem como finalidade atender todos os pontos de demanda utilizando o menor número de alocação de facilidades e, conseqüentemente, menor custo de cobertura. As facilidades podem ser hospitais, centrais de corpos de bombeiros, entre outras. CRAWFORD *et al.* (2021) considera que o PCC é um problema de otimização aplicado, que visa atender uma certa quantidade de necessidades por meio de alocação de um conjunto de elementos garantindo um menor custo.

Segundo LANZA-GUTIERREZ *et al.* (2020), o Problema de Cobertura de Conjuntos pode ser expresso por um modelo matemático, em que  $I = \{1, 2, \dots, m\}$  representa as linhas (necessidades ou pontos de demanda), o  $J = \{1, 2, \dots, n\}$  define as colunas (elementos ou facilidades) e o  $C_j$  é o custo de um elemento. O parâmetro  $a_{i,j}$

ilustra se uma necessidade é atendida por um elemento ou não. A Matriz binária  $A$ , demonstrada em 2.1, é formada pelo conjunto de todas os parâmetros  $a_{i,j}$ . Sabe-se que  $i \in I$ , e  $j \in J$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,j} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

$$\min \sum_{j \in J} C_j x_j \quad (2.2)$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq 1 \quad i \in I \quad (2.3)$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad j \in J \quad (2.4)$$

A função objetivo (2.2) visa a minimizar o custo de cobertura, a restrição (2.3) determina que cada elemento do conjunto linha deve ser atendido por pelo menos um elemento do conjunto coluna e a restrição (2.4) representa que a variável de decisão é binária.

Em muitos casos reais, a restrição orçamentária é um complicador para aplicar o Problema de Cobertura de Conjuntos, impedindo que a região seja toda coberta. Então, a quantidade de facilidades acaba sendo proporcional ao limite orçamentário disponível para a execução do problema (CURRENT, 1990).

CHURCH e REVELLE (1974) foram os primeiros a implementar o Problema de Localização de Máxima Cobertura. Esse tipo de problema tem como objetivo maximizar o atendimento de necessidades utilizando um número máximo de facilidades. Para GALVÃO *et al.* (2000), o PLMC pode ser representado por um modelo matemático, em que  $I$  representa o conjunto de pontos a ser cobertos e  $J$  o conjunto de facilidades. O parâmetro  $a_{ij}$  é binário e será 1 se a necessidade  $i$  for atendida pela facilidade  $j$  e 0 caso não seja atendida, sendo  $i \in I$  e  $j \in J$ . Todos os parâmetros  $a_{ij}$  utilizados no problema também formam uma matriz (2.1). O  $P$  representa o número máximo de facilidades disponível. O  $f_i$  representa o peso da necessidade  $i$  ser atendida. Por fim, o modelo tem duas variáveis de decisão binárias:  $x_j$ , que define se a facilidade será alocada no ponto  $i$ ; e  $y_i$ , que representa se a necessidade em  $i$  é coberta ou não.

$$\max \sum_{i \in I} f_i y_i \quad (2.5)$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j - y_i \geq 0 \quad i \in I \quad (2.6)$$

$$\sum_{j \in J} x_j = P \quad (2.7)$$

$$x_i, y_j \in \{0, 1\} \quad i \in I, j \in J \quad (2.8)$$

A função objetivo (2.5) visa a maximizar a cobertura das necessidades. A restrição (2.6) determina que uma necessidade é atendida, caso essa seja coberta por pelo menos uma facilidade. A restrição (2.7) informa o número de facilidades que devem ser utilizadas. Por fim, a restrição (2.8) representa o domínio das variáveis de decisões.

A cada ano vem crescendo o número de trabalhos e estudos referentes ao PLMC. Em consequência, vários modelos, produtos de software e algoritmos foram desenvolvidos e aprimorados com a finalidade de resolver esse tipo de problema de forma mais eficiente (MURRAY, 2016). Como exemplo, WEI e MURRAY (2015) aplicaram o problema de cobertura de área como um problema contínuo, em que as demandas não são pontos estocásticos, mas uma região com igualdade de peso e as facilidades podem ser alocadas em qualquer localização da área em estudo. Os autores aplicaram um modelo não linear para solucionar o problema.

Já LI *et al.* (2020) desenvolveram um modelo multiobjetivo para resolver o problema de localização de máxima cobertura balanceada, buscando que cada facilidade tenha um limite inferior de demanda coberta e assim deixando mais equilibradas as coberturas. Os autores aplicaram o modelo em um problema de compartilhamento de bicicletas em uma cidade grande da China.

Tanto o PCC quanto o PLMC são classificados como problema NP difícil e, muitas vezes, a aplicação de modelos matemáticos são inviáveis em decorrência do tamanho dos conjuntos de dados (LAN *et al.*, 2007; MEGIDDO *et al.*, 1983). Uma alternativa para obter boas soluções nesses problemas e executá-los em um tempo polinomial (tempo computacionalmente viável) é o emprego de heurísticas (CASERTA, 2007; MURRAY e CHURCH, 1996).

Na literatura são encontrados diversos trabalhos de Problema de Cobertura de Conjuntos e de Problema de Localização de Máxima Cobertura sendo resolvidas por meta-heurísticas. Como esse estudo busca resolver um problema de PLMC, serão apresentados alguns trabalhos utilizando essa abordagem.

XHAFA *et al.* (2015) buscavam solucionar um problema de redes de malha sem fio (WMNs) através da aplicação de Busca Tabu. O objetivo do trabalho era definir os locais de instalação das antenas para maximizar a cobertura dos clientes. Foram utilizadas instâncias conhecidas na literatura e a meta-heurística apresentou resultados satisfatórios.

ZARANDI *et al.* (2011) utilizaram Algoritmo Genético (AG) customizado para resolver instâncias de MCLP com até 2.500 nós. A meta-heurística apresentou re-

sultados muito próximos ao ótimo global obtido pelo resolvidor CPLEX, que foi aplicado no estudo.

Há alguns relatos de trabalhos que utilizaram mais de uma meta-heurística. DÍAZ *et al.* (2017), por exemplo, realizaram um estudo para resolver um problema de localização de cobertura máxima, cujo objetivo era maximizar a demanda de um conjunto de clientes cobertos por um conjunto de instalações localizadas entre um conjunto de *sites* potenciais. Entretanto, nesse estudo, a instalação definida para cada cliente não dependia apenas da distância, mas de outros fatores, como exemplo: renda, escolaridade e idade. Foram propostas duas heurísticas: GRASP e GRASP-Tabu. As duas apresentaram bons resultados, mas a heurística híbrida obteve melhor tempo computacional (menos tempo de execução).

Outro exemplo, foi o trabalho desenvolvido por CALDERÍN *et al.* (2017). A fim de resolver 45 instâncias de máxima cobertura, foi proposto um portfólio de algoritmos, contendo três *Simulated Annealing* e uma Estratégia Evolutiva. O portfólio apresentou melhor resultado em comparação às heurísticas separadas.

Já XIA *et al.* (2009), realizaram uma análise do desempenho entre cinco heurísticas aplicadas ao Problema de Localização de Máxima Cobertura: Heurística Gulosa, Heurística de Trocas, *Simulated Annealing*, Algoritmo Genético e Busca Tabu. Os autores relataram que ao utilizarem várias instâncias de tamanhos diferentes, o *Simulated Annealing* obteve o melhor resultado.

## 2.2 Sonar

O Sonar (do inglês *Sound Navigation and Ranging*) é um instrumento que se baseia na propagação do som em águas salgadas. A história desse equipamento é antiga e possui suas primeiras referências em um experimento realizado por Leonardo Da Vinci em 1490. Nos séculos seguintes, ocorreram muitas descobertas que possibilitaram aprimorar o desenvolvimento desse equipamento, mas foi durante a Primeira e Segunda Guerra Mundial que o sonar ganhou destaque por ser empregado em diversas áreas militares. Até os dias de hoje, essa tecnologia vem sendo aprimorada, além de apresentar vastas aplicações em atividades militares e não militares (URICK, 1983).

A equação sonar é formada pelo conjunto de três tipos de parâmetros: parâmetros determinados pelo equipamento, parâmetros referentes ao ambiente em estudo e parâmetros relacionados ao alvo a ser detectado, apresentados na Tabela 2.1, (TORRES, 2019; URICK, 1983). Uma das principais funções da equação sonar é estimar o desempenho do sonar com base nos parâmetros definidos e, desta forma, ser capaz de estimar o alcance de um sonar (URICK, 1983).

O sonar pode ser passivo ou ativo. Nesse trabalho daremos enfoque ao sonar



ativo. Segundo URICK (1983), a equação sonar de um sonar monostático pode ser expressa conforme a Equação (2.9).

$$SL - 2TL + TS = NL - DI + DT \quad (2.9)$$

Tabela 2.1: Parâmetros da Equação Sonar

Parâmetro	Sigla	Definição	Tipo
<i>Source Level</i>	SL	Representa o nível de pressão sonora irradiado	Equipamento
<i>Transmission Loss</i>	TL	Define a quantidade de sinal perdido durante a propagação. A perda pode ser por absorção ou por dispersão. É multiplicado por 2 pois ocorre perda de propagação da fonte até o alvo e do alvo até o receptor	Ambiente
<i>Target Strength</i>	TS	Refere-se ao eco refletido pelo alvo. Cada alvo tem um valor distinto	Alvo
<i>Noise Level</i>	NL	É o nível de ruído total formado pelo ruído do ambiente mais o ruído oriundo do equipamento	Ambiente e equipamento
<i>Directivity Index</i>	DI	Representa a capacidade do receptor em identificar a direção do ruído	Equipamento
<i>Detection threshold</i>	Th- DT	Define a relação entre sinal e ruído e o valor depende do sistema utilizado	Equipamento

COX (1989) afirma que a equação sonar utilizada em sonar distáticos e em sistema multistático, ao invés de ser  $2TL$ , ocorre a soma de dois  $TL$  diferentes: um  $TL_{s,t}$ , que é a perda na transmissão da fonte até o alvo; o  $TL_{t,r}$ , referente à perda na transmissão entre o alvo e o receptor. Isso ocorre porque a fonte e o receptor não estão na mesma posição geográfica e podem ter distâncias diferentes até o alvo.

Na literatura são apresentadas muitas vantagens ao empregar o sistema multistático em comparação ao monostático. Pode-se citar como exemplo:

- **Custo:** O preço de uma fonte é muito mais alto do o preço de um receptor. Então, ao utilizar mais receptores que fontes, o custo total de um sistema multistático torna-se mais barato que o custo total do sistema monostático (COX, 1989; HOF, 2015).
- **Estratégico:** Como os receptores não produzem sons, os alvos têm dificuldade em localizar os receptores (COX, 1989; WASHBURN e KARATAS, 2015).

- Qualidade: como o eco de um alvo pode ser detectado por mais de um receptor, os sinais são mais precisos e apresentam menos falsos alarmes (WASHBURN e KARATAS, 2015).
- Ambiental: Emite menos *pings* que o sistema monostático, causando menos poluição sonora e menos estresse ao meio submarino (CRAPARO *et al.*, 2017).
- Flexibilidade: a fonte pode ser um sonar de um navio, uma sonoboia ativa, entre outros. Já o receptor pode ser uma sonoboia passiva ou um arranjo de hidrofones. Desta forma, não há a necessidade de utilizar a mesma plataforma para as fontes e receptores (KARATAS *et al.*, 2016; WASHBURN e KARATAS, 2015).

A principal desvantagem em utilizar o sistema multistático é a dificuldade em se obter a probabilidade de detecção de um alvo. Em um ambiente isotônico, enquanto no sonar monostático a probabilidade de detecção é definida pela distância do sonar até o alvo, no distático a probabilidade de detecção é obtida por meio da multiplicação da distância da fonte até o alvo ( $d_{st}$ ) com a distância do alvo até o receptor ( $d_{tr}$ ), onde o  $s$  representa uma fonte, o  $r$  um receptor e o  $t$  um alvo. Os contornos geométricos obtidos pela multiplicação entre as distâncias são conhecidas como Curvas de Cassini, Figura 2.1, e são representados pela Equação (2.10). Além do mais, as curvas variam segundo o distanciamento entre a fonte e o receptor  $d_{sr}$  (KUHN, 2014). OZOLS e FEWELL (2011) afirmam que o  $\rho_{str}$  é um parâmetro equivalente ao alcance de um sistema monostático para uma determinada probabilidade de detecção. Essa condição é verdadeira caso os dois sonares estejam situados nas mesmas condições de estudo. Para LU *et al.* (2013), o alcance de um sonar distático pode ser calculado conforme as equações (2.11), (2.12) e (2.13).

$$d_{st}d_{tr} = \rho_{str}^2 \quad (2.10)$$

$$TL_{st} + TL_{tr} = 20 \log(d_{st}d_{tr}) + \alpha d_{st}d_{tr} \approx 20 \log(d_{st}d_{tr}) \quad (2.11)$$

Onde  $\alpha$  é o coeficiente de absorção. A partir das equações (2.10), (2.11) e (2.9) é possível obter a seguinte equação:

$$20 \log(\rho_{srt}^2) = SL + TS - NL + DI - DT \quad (2.12)$$

Então:

$$\rho_{srt}^2 = 10^{\frac{(SL+TS-NL+DI-DT)}{20}} \quad (2.13)$$

Um parâmetro muito utilizado em diversos trabalhos de sistema multistático é o alcance do dia ( $\rho_0$  ou  $RoD$ ). Em muitos casos, esse parâmetro representa o  $\rho_{srt}$  para uma probabilidade de 50% (FEWELL e OZOLS, 2011; KUHN, 2014). O  $RoD$  de um sonar multistático leva em consideração alguns parâmetros, entre eles estão a temperatura, a salinidade e a pressão do ambiente marítimo (FÜGENSCHUH *et al.*, 2021).

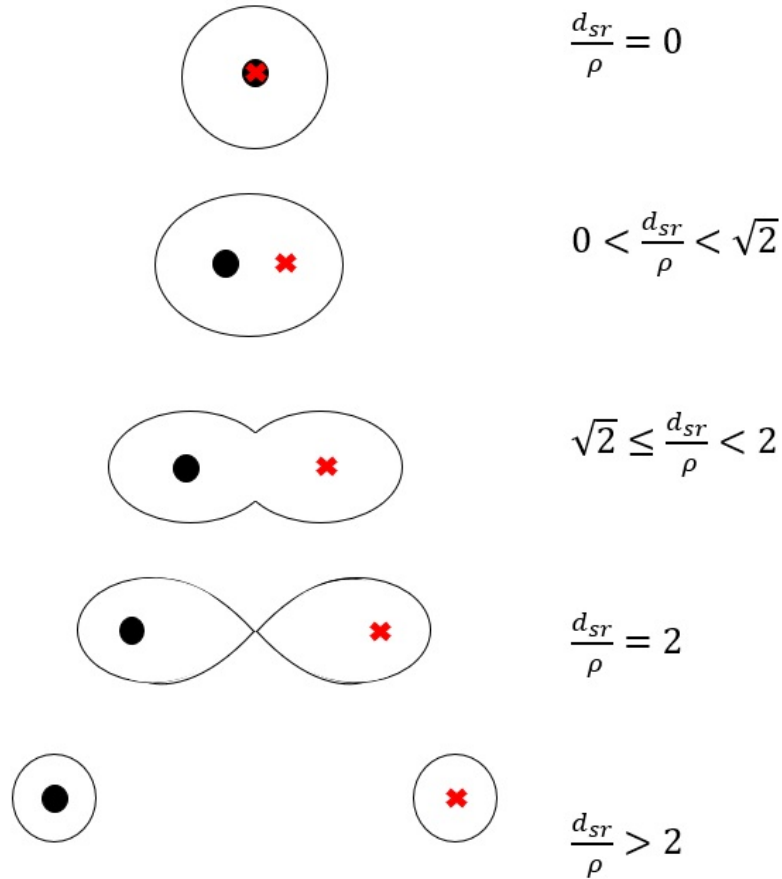


Figura 2.1: Curva de Cassini

## 2.2.1 Modelo de Sensores

A probabilidade de detecção  $P_{rst}$  de um alvo  $t$  considerando uma fonte  $s$  e um receptor  $r$  pode ser calculada de algumas maneiras. Pode ser empregado o modelo de sensor *Cookie Cutter* ou modelos probabilísticos (Função de Fermi e Função Exponencial).

### 2.2.1.1 Modelo de Sensor *Cookie Cutter*

O modelo de sensor *Cookie Cutter* ou Alcance Definido (CC) é um modelo simples de detecção que apresenta probabilidade de detecção binária. A probabilidade é 1 se

o alvo estiver dentro do perímetro de detecção delimitado pelas Curvas de Cassini, caso contrário, é zero. A probabilidade de detecção  $P_{rst}$  pode ser definida segundo a expressão (2.14) (CRAPARO *et al.*, 2017).

$$P_{rst} = \begin{cases} 1, & \text{se } \rho_b \leq \rho_{rst} \leq \rho_0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.14)$$

A zona cega  $\rho_b$  é a região onde não é possível detectar um alvo, pois o eco desse alvo chega ao receptor ao mesmo tempo que o *ping* da fonte. Isso ocorre em decorrência do efeito chamado explosão direta (COX, 1989; KUHN, 2014). Segundo COX (1989), é possível minimizar esse efeito ao realizar alguns ajustes na fonte e no receptor. Na Figura 2.2 é possível ver um exemplo de zona cega. KUHN (2014), HOF (2015) e KARATAS *et al.* (2016) desprezaram esse efeito em seus trabalhos.

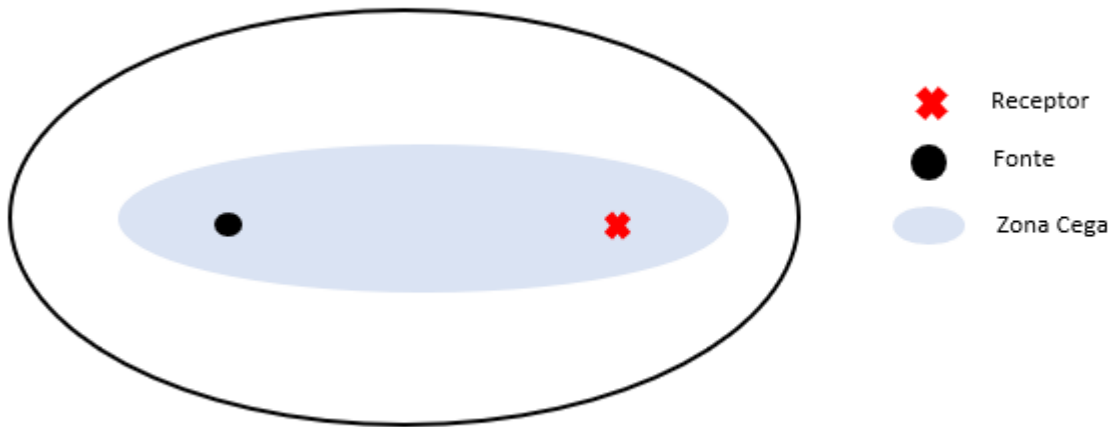


Figura 2.2: Zona Cega

A probabilidade de detecção de um alvo  $P_t$  é apresentada pela Equação (2.15).

$$P_t = \max_{(s,r) \in S \times R} P_{rst} \quad (2.15)$$

### 2.2.1.2 Modelo de Sensor Probabilístico

Os autores FEWELL e OZOLS (2011) propuseram dois modelos de sensor utilizando funções de probabilidade. O primeiro modelo é a Função de Fermi, ilustrada na expressão 2.16.

$$P_{rst} = \begin{cases} \left(1 + 10^{\left(\frac{\rho_{rst} - \rho_0}{b\rho_0}\right)}\right)^{-1}, & \text{se } \rho_{rst} \geq \rho_b \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.16)$$

O parâmetro  $b$  expressa o quão rápido o valor da probabilidade de detecção de um alvo muda conforme o  $\rho_{rst}$  é alterado. Quanto menor for o  $b$ , mais próximo esse modelo ficará do modelo CC (CRAPARO *et al.*, 2017). Essa relação pode ser vista no gráfico 2.3.

A segunda é uma Função Exponencial, ilustrada na Equação (2.17).

$$P_{rst} = \begin{cases} 10^{-0,30103 \frac{\rho_{rst}}{\rho_0}}, & \text{se } \rho_{rst} \geq \rho_b \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.17)$$

Nos modelos de sensor probabilístico (Função de Fermi e Função Exponencial), a probabilidade de detecção de um alvo é calculada de forma diferente em comparação ao modelo *Cookie Cutter*. Nesse caso, é utilizada a Equação (2.18) e é assumido que todos os eventos  $\rho_{rst}$  são independentes (KUHN, 2014).

$$P_t = 1 - \prod_{(s,r) \in S \times R} (1 - P_{rst}) \quad (2.18)$$

No Gráfico 2.3 é mostrada a probabilidade de detecção obtida para os diferentes modelos de sensores.

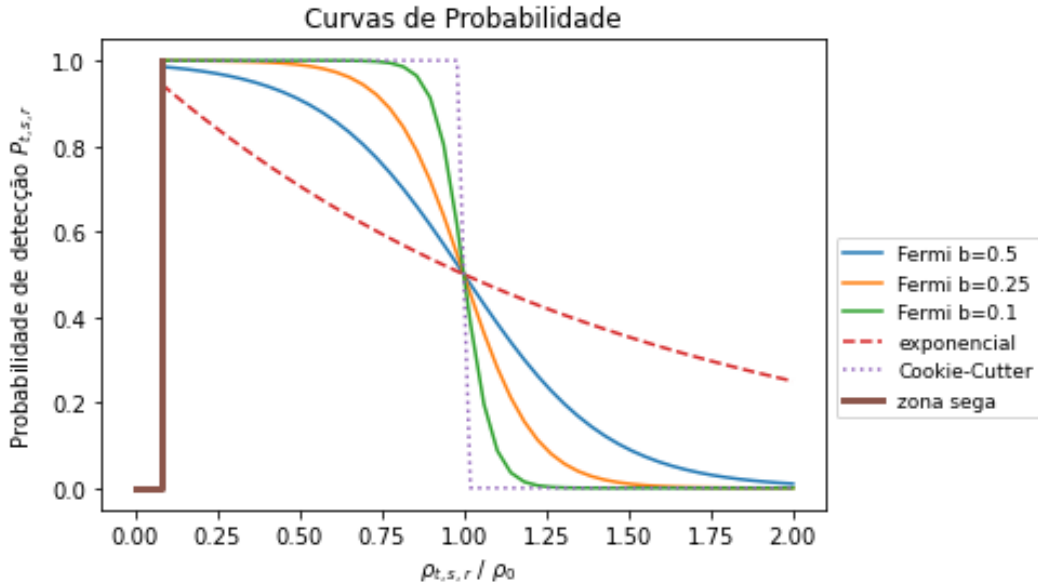


Figura 2.3: Curvas de Probabilidade de Detecção

## 2.2.2 Cobertura Acústica em Sistema de Sonar Multistático

Na literatura é possível encontrar alguns trabalhos de cobertura acústica submarina utilizando sistema de sonar multistático. Esses apresentam distintos objetivos e métodos de resolução.

CRAPARO *et al.* (2017), realizaram um dos primeiros trabalhos relacionados aos problemas de cobertura de pontos estacionários de interesse, considerando que a localizações dos alvos são conhecidas. Foram propostos dois modelos matemáticos para solução do problema de localização de fonte e receptores, sendo um deles não linear (MSN-NLP) e o segundo um modelo não linear inteiro (MSN-INLP). Os modelos não garantiram bons resultados. Em seguida, os pesquisadores desenvolveram um algoritmo, o *Divide Best Sector* (DiBS), que buscava definir a melhor localização de uma fonte para detecção de alvos estacionários, considerando a premissa de que as posições dos receptores e dos alvos eram conhecidas. O DiBS é considerado um algoritmo do tipo "dividir para conquistar" e obteve resultados muito satisfatórios, podendo ser implementado em problemas reais com grande quantidade de alvos e receptores.

CRAPARO *et al.* (2018) realizaram outro trabalho para cobrir alvos que estavam localizados em posições conhecidas através da melhor disposição de fontes e receptores. Foram desenvolvidas duas modelagens matemáticas (DISC-LOC-M e DISC-LOC-enum) e duas heurísticas (Adapt-LOC e Iter-LOC). Nos quatro casos empregou-se o modelo de sensor *Cookie-Cutter*. O resultado obtido e o tempo computacional foram comparados para cada técnica de resolução do problema. Para os dois modelos obteve-se bons resultados, entretanto em alguns casos o tempo computacional foi extremamente alto, sendo inviável para ser aplicado em casos reais. A heurística Adapt-LOC apresenta uma solução rápida, porém a heurística Iter-LOC obteve melhores resultados, mas em um tempo computacional maior. Por fim, as duas heurísticas foram consideradas adequadas para serem utilizadas em problemas reais e obtiveram resultados melhores que o algoritmo da literatura utilizado como referência nesse trabalho.

NGATCHOU *et al.* (2006) visavam a resolver um problema de cobertura acústica, que era composto por multiobjetivos : minimizar o custo e maximizar a área coberta. Para resolver o problema de cobertura acústica utilizando um sistema multistático, os autores desenvolveram dois algoritmos: um algoritmo guloso e um segundo algoritmo mais eficiente, porém com o tempo computacional alto. As técnicas foram desenvolvidas utilizando Otimização de Enxame de Partículas (PSO), sendo o segundo algoritmo um PSO modificado, chamado de PSO sequencial (S-PSO). Os dois algoritmos apresentaram bons resultados. O último obteve resultados muito próximos da referência utilizada no estudo, além de ser executado em um melhor

tempo computacional.

FÜGENSCHUH *et al.* (2021) compararam o desempenho computacional de seis técnicas de resolução: uma não linear inteira e cinco lineares inteiras, que são oriundas da não linear. Foram empregadas 30 instâncias conhecidas na literatura e foram utilizados dois modelos de cobertura: o primeiro objetivava maximizar as áreas cobertas considerando quantidades pré-definidas de fontes e receptores; o segundo visava a minimizar o custo total de cobertura para cobrir 100% das áreas. Também foram empregados dois modelos de detecção (*Cookie-Cutter* e Probabilístico). Verificou-se que as técnicas de resoluções OK1-S e CPP-S apresentaram melhor tempo de resolução para os dois problemas estudados (duas modelagens) tanto aplicando o modelo de sensor *Cookie-Cutter* quanto o modelo de sensor probabilístico.

No presente estudo, utilizou-se o trabalho de FÜGENSCHUH *et al.* (2021) como referência, pois também pretende-se cobrir uma região submarina que possui obstáculos (regiões costeiras ou ilhas). O trabalho dos autores tinha como objetivo analisar o tempo computacional entre 6 técnicas de resolução, porém não verificaram qual modelo de sensor acarretava melhor cobertura submarina. Nesta dissertação pretende-se utilizar uma modelagem parecida com a modelagem base (não linear) proposta no trabalho de FÜGENSCHUH *et al.* (2021), entretanto os objetivos do estudo serão diferentes, pois neste estudo será realizado uma comparação entre os modelos de cobertura, além de desenvolver ferramentas para obter a cobertura acústica de mapas com melhor resoluções, ou seja, com um *grid* mais denso.

# Capítulo 3

## Descrição do Problema

Em estudos desenvolvidos com o objetivo de resolver problemas de cobertura empregando sensores, como no caso de sonares, esses problemas foram classificados em três tipos de cobertura. O primeiro problema é a cobertura de área, onde o objetivo é maximizar a cobertura e monitorar a região de interesse. O segundo é a cobertura de barreira, utilizado para monitorar uma linha. Esse tipo é muito utilizado em atividades militares ou controle de áreas militares, como em regiões de monitoramento de fronteiras. Por fim, a cobertura de pontos, que é considerado um caso derivado da cobertura de áreas. Sua finalidade é monitorar pontos de interesse. No meio militar, esses pontos podem ser, por exemplo, alvos (ERISKIN, 2021).

O problema estudado no presente trabalho pode ser classificado como um problema de cobertura de área, em que as facilidades são as fontes e os receptores do sistema multistático de sonar ativo; e os pontos a serem cobertos são os quadrados do *grid* do mapa da região de interesse. Foram selecionadas duas regiões da costa brasileira para executar o experimento computacional, conforme pode ser observado nas Figuras 3.1(a) e 3.1(b). A primeira é um quadrado de aproximadamente  $6km^2$ , situado perto da cidade do Rio de Janeiro e, para essa região, foram adotadas as escalas de 1:500 m, 1:300 m, 1:200 m e 1:100 m. A segunda, é um retângulo de aproximadamente 6 km por 7 km, localizado na cidade de Natal e as escalas utilizadas foram as mesmas adotadas na primeira região. Os mapas são formados por *grids* compostos por  $n$  quadrados. Os *grids* variam de tamanho conforme a escala adotada. Além do mais, há quadrados que são de terra e quadrados que são regiões de água.

As regiões foram divididas em sub-regiões, conforme exemplo da Área 1 para a escala 1:500 m, ilustrada na Figura 3.2. Foi considerado que as regiões de entrada dos canais e as regiões perto das bases da MB são áreas mais importantes para serem monitoradas, pois são áreas mais sensíveis para a segurança naval devido ao deslocamento de embarcações da MB nessas regiões. Onde for região de terra, a prioridade de cobertura é zero. O meio do quadrado representa o local de instalação



dos sensores. Por fim, os quadrados serão cobertos se o centro do quadrado for coberto.

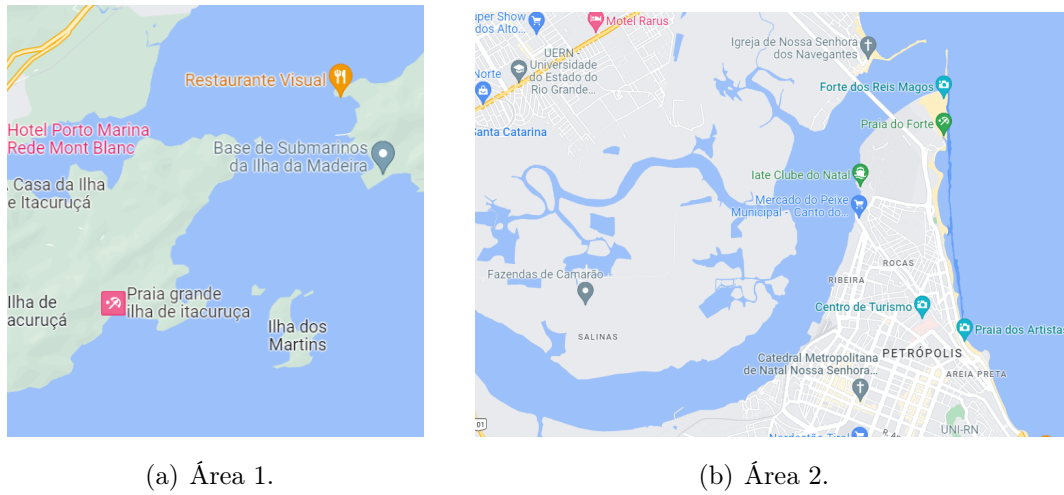


Figura 3.1: Regiões de Estudo

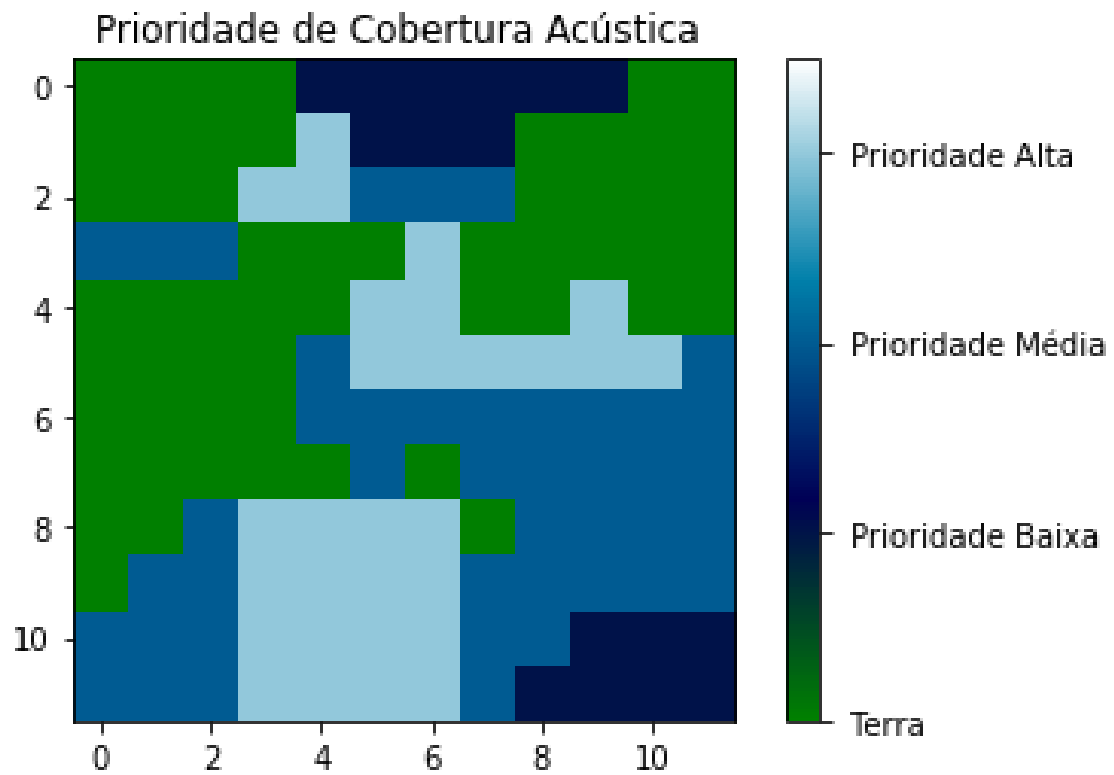


Figura 3.2: Mapa Dividido por Sub-regiões

Nas Figuras 3.3(a), 3.3(b), 3.3(c) e 3.3(d) são mostradas as diferentes escalas para a área 1. Nas Figuras 3.4(a), 3.4(b), 3.4(c) e 3.4(d) são apresentadas a região 2 para as diferentes escalas. O parâmetro  $n$  representa o número de quadrados que compõem o *grid* e o parâmetros  $a$ , o número de quadrados de água, sendo esses de interesse neste trabalho.

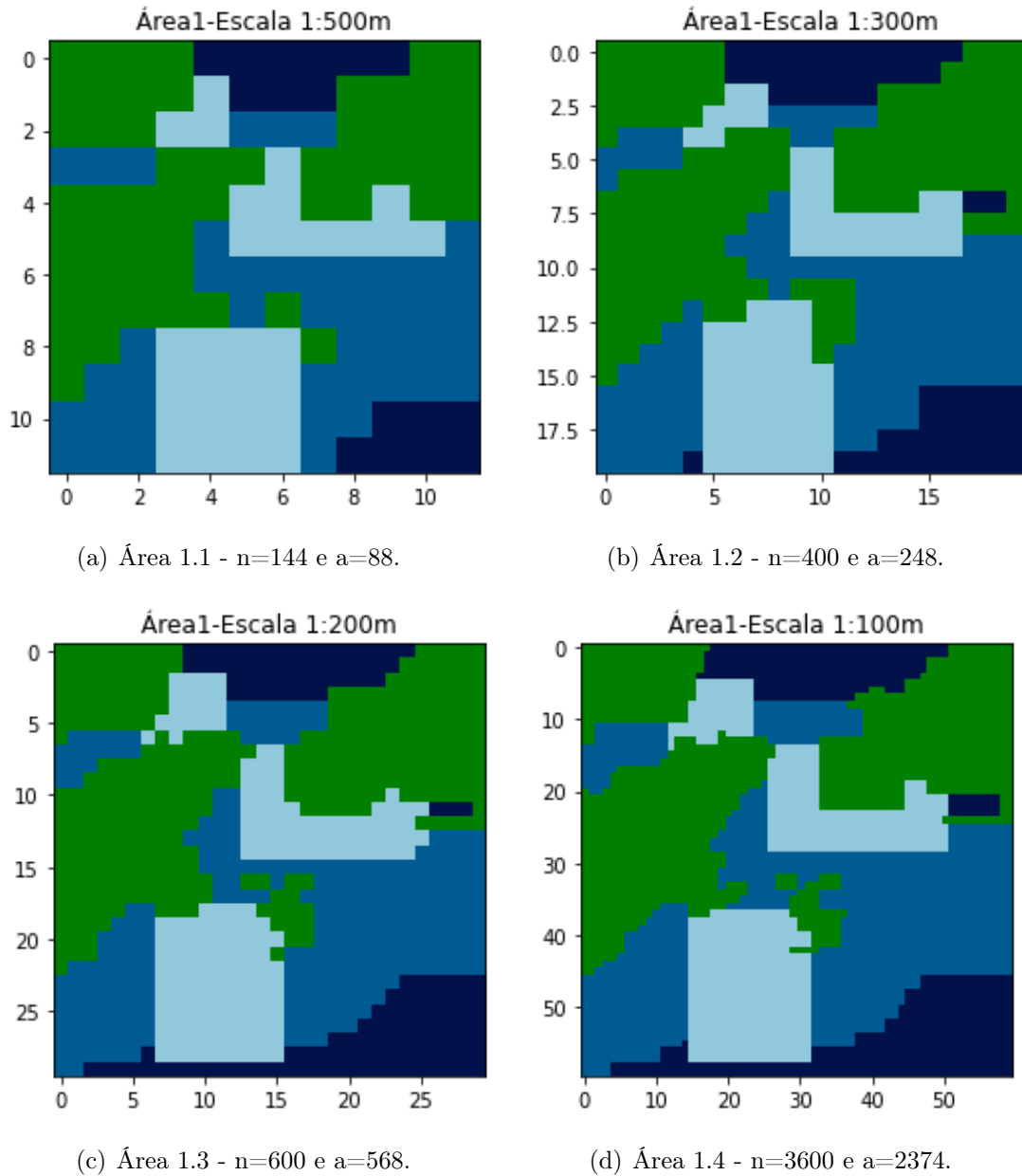


Figura 3.3: Escalas da Área 1

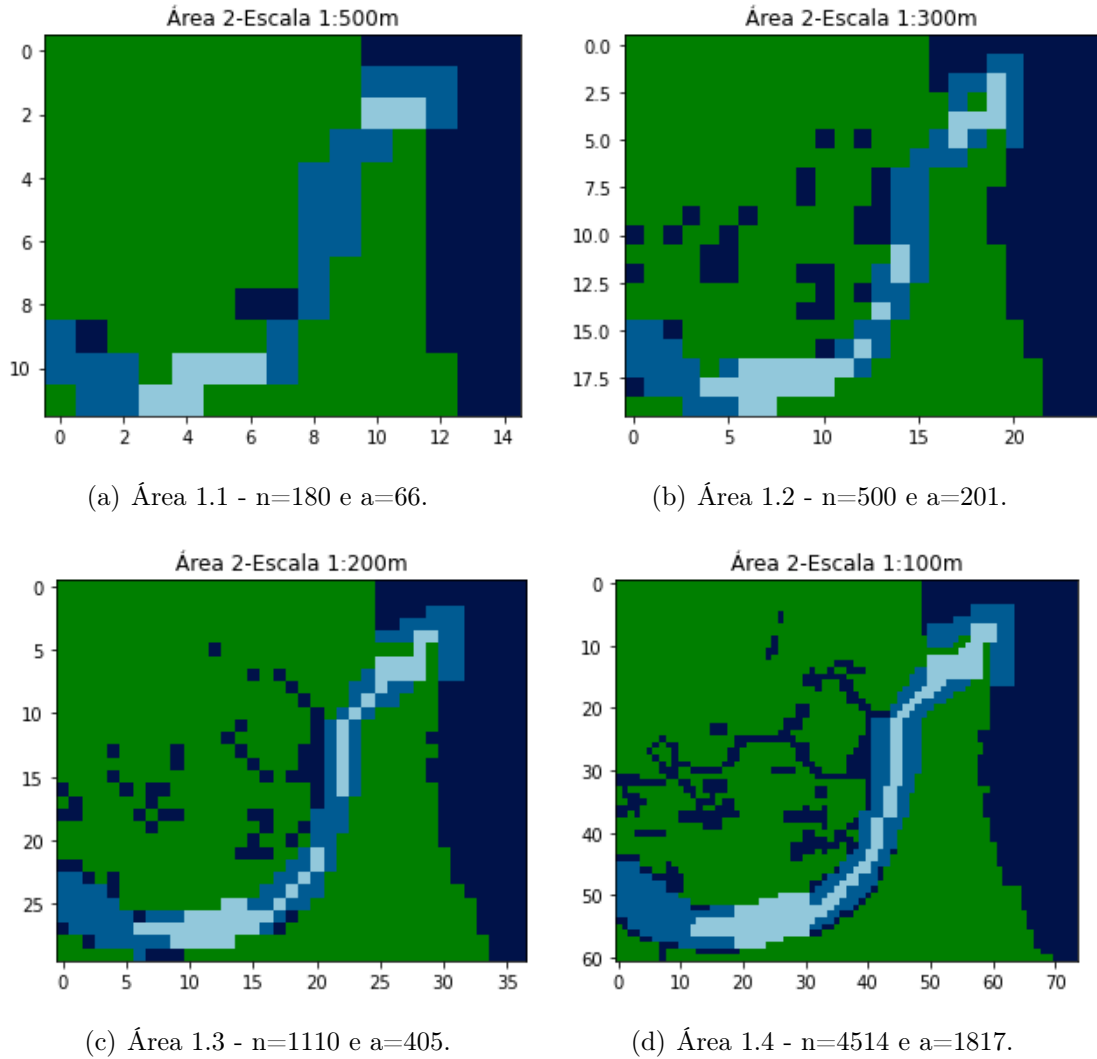


Figura 3.4: Escalas da Área 2

KUHN (2014), HOF (2015), NGATCHOU *et al.* (2006) consideraram em seus trabalhos que as regiões a serem estudadas estavam inseridas em um ambiente homogêneo e de duas dimensões. Neste trabalho também será considerado um ambiente homogêneo de duas coordenadas. Além disso, a profundidade não foi levada em consideração, pois o alcance do dia ( $RoD$ ) pode variar conforme a profundidade, já que os valores de temperatura, salinidade e pressão sofrem variação. Por fim, a região de zona cega foi desprezada no presente estudo.

Conforme apresentado na Seção 2.2, o alcance de um sonar depende do ambiente, do equipamento e do alvo que se pretende detectar. Neste estudo não foram definidos quais os tipos de equipamentos ou plataformas utilizados, podendo ser, por exemplo, uma sonoboia ou um arranjo de hidrofones. Além disso, os alvos também não foram classificados, podendo ser um submarino nuclear, um submarino elétrico ou outro tipo de alvo. Desta forma, O comprimento dos alcances do dia empregados no trabalho já foram pré-definidos. Então, não foi necessário realizar os cálculos para

obter os *RoD*.

Por último, foram considerados apenas os custos dos sensores (fontes e receptores), não foram computados no estudo os custos oriundos da atividade de posicionamento dos sensores nas regiões de interesse.

# Capítulo 4

## Modelagem Matemática

Nessa seção serão apresentados os modelos matemáticos utilizados neste trabalho para resolver o problema de posicionamento dos receptores e fontes de um sistema multistático. Foi realizada uma análise para definir qual a melhor modelagem para ser utilizada em regiões de interesse da MB.

### 4.1 Modelos de Cobertura Submarina

Neste trabalho, inicialmente foram utilizados quatro modelos matemáticos baseados no trabalho de FÜGENSCHUH *et al.* (2021). Dois deles são modelos de Problema de Cobertura de Conjuntos, que têm como objetivo cobrir 100% da área em estudo, minimizando o custo total de cobertura. O que diferencia esses dois modelos é a forma como a probabilidade de cobertura é calculada. O primeiro utiliza o modelo de sensor *Cookie-Cutter*, enquanto o segundo aplica o modelo de sensor Probabilístico. Os outros dois são modelos de Problema de Localização de Máxima Cobertura. Estes visam a maximizar a área total coberta e levam em consideração os pesos de cobertura dos quadrados e a limitação orçamentária para instalação dos sensores. Para os dois últimos modelos, quanto maior for o peso, maior é a prioridade da cobertura da região. Eles também se distinguem entre si no modo como é calculada a cobertura dos quadrados.

Na Tabela 4.1 são apresentados os parâmetros e o conjunto utilizados nos modelos matemáticos. Na Tabela 4.2 são apresentadas as variáveis de decisão.

Tabela 4.1: Parâmetros e Conjunto

Parâmetros e Conjunto	Descrição	Observação
$G$	Conjunto dos quadrados de um <i>grid</i>	
$C^s$	Custo de instalação de uma fonte	
$C^r$	Custo de instalação de um receptor	
$P_{ijk}$	Probabilidade de detecção conforme o modelo de sensor adotado, sendo $i, j$ e $k \in G$	
$V$	Limite Orçamentário para instalação de um sistema multistático	Utilizados em modelos para maximizar a área coberta
$M_k$	Peso do quadrado $k$ , para $k \in G$	Utilizados em modelos para maximizar a área coberta
$D_k$	Probabilidade mínima de detecção de um alvo $k$ , para $k \in G$	Utilizados quando empregados modelos de sensor probabilístico
$Prob_{Max}$	Valor máximo de probabilidade de detecção da região em estudo	Utilizados quando empregados modelos de sensor probabilístico

Tabela 4.2: Variáveis de Decisão

Parâmetros e Conjunto	Descrição	Observação
$s_i$	Será 1 se a fonte for instalada na posição $i$ , caso contrário será 0, sendo $i \in G$	
$r_j$	Será 1 se o receptor for instalado na posição $j$ , caso contrário será 0, sendo $j \in G$	
$x_k$	Será 1 se o quadrado $k$ for coberto por um conjunto de fonte e receptor, caso ao contrário será 0, para todo $k \in G$	Utilizados em modelos para maximizar a área coberta

#### 4.1.1 Modelo Cobertura Total de Detecção *Cookie Cutter* (CTCC)

Neste modelo o  $P_{ijk}$  é uma função que utiliza o modelo de alcance definido, retornando 1, se o quadrado  $k$  for coberto por uma fonte em  $i$  e um receptor em  $j$ , para  $k, i, j \in G$  e zero caso não haja cobertura. Para calcular  $P_{ijk}$  utiliza-se a sub-rotina, que é definida pelo Algoritmo (1). As variáveis de entrada são  $i, j, k \in G$ ; uma matriz contendo os quadrados da região em estudo ( $matriz_{pos}$ ); uma matriz contendo a prioridade de detecção de cada quadrado ( $matriz_{pri}$ ); o alcance do dia ( $\rho_0$ ); a escala ( $Escala$ ) e os conjuntos de quadrados que formam um canal e estão entre dois quadrados de terra ( $conjunto$ ). Esse último parâmetro é exemplificado na Figura 4.1, em que caso a distância euclidiana entre a fonte e o alvo ou o receptor e o alvo passar pelos quadrados que estão sobre um canal, pode retornar 1 se atender ao critério de cobertura. Por outro lado, se passar por dois quadrados entre duas regiões de terra que formam uma ilha, a função retorna zero. Por fim, o algoritmo retorna a probabilidade de detecção  $P_{ijk}$ , que é binária, 0 ou 1.

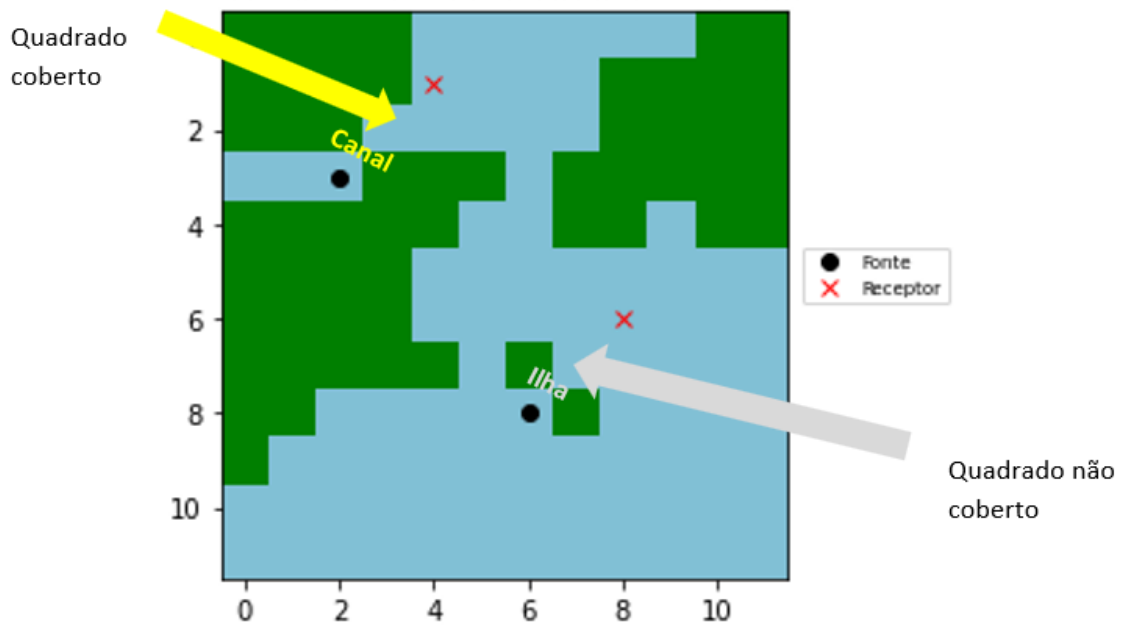


Figura 4.1: Diferença entre Ilhas e Canais

---

**Algoritmo 1:** Sub-rotina de Probabilidade de Detecção Modelo CC

---

**Entrada:**  $i, j, k$ ,  $matriz_{pos}$ ,  $matriz_{pri}$ ,  $Escala$ ,  $\rho_0$ ,  $conjunto$

**Saída:**  $P_{i,j,k}$

- 1 Caso  $\rho_{i,j,k} \leq \rho_0$  ir para o item 2, caso contrário o  $P_{i,j,k} = 0$ ;
  - 2 Definir uma lista ( $Lista_{quad}$ ) de pontos entre  $i$  e  $k$  e entre  $j$  e  $k$ ;
  - 3 Se pelo menos um ponto da lista  $Lista_{quad}$  for uma região de terra  $P_{i,j,k} = 0$ , caso contrário  $P_{i,j,k} = 1$ .
- 

$$\min C^s \sum_{i \in G} s_i + C^r \sum_{j \in G} r_j \quad (4.1)$$

$$\sum_{i \in G} \sum_{j \in G} P_{ijk} s_i r_j \geq 1 \quad k \in G \quad (4.2)$$

$$s_i, r_j \in \{0, 1\} \quad i, j \in G \quad (4.3)$$

A Equação (4.1) representa a função objetivo, que visa a minimizar o custo de cobertura total. A Desigualdade (4.2) considera que cada quadrado  $k \in G$  deve ser coberto por pelo menos um conjunto de fonte e receptor. Na restrição (4.3) é definido o domínio das variáveis de decisão.

#### 4.1.2 Modelo Cobertura Parcial de Detecção *Cookie Cutter* (CPCC)

Neste modelo o  $P_{kij}$  também é uma função que retorna 0 ou 1, como apresentado na Seção 4.1.1 e no Algoritmo (1).

$$\max \sum_{i \in G} M_k x_k \quad (4.4)$$

$$\sum_{i \in G} \sum_{j \in G} P_{ijk} s_i r_j \geq x_k \quad k \in G \quad (4.5)$$

$$C^s \sum_{i \in G} s_i + C^r \sum_{j \in G} r_j \leq V \quad (4.6)$$

$$s_i, r_j, x_k \in \{0, 1\} \quad i, j, k \in G \quad (4.7)$$

A função objetivo é representada na Equação (4.4) e visa a maximizar os peso de cobertura. A Desigualdade (4.5) indica que para o quadrado do *grid* seja coberto, pelo menos um conjunto de fonte e receptor deve ser utilizado. A Desigualdade (4.6) implica que a soma dos custos das fontes e receptores deve ser menor ou igual a um orçamento dado. Por fim, a restrição (4.7) apresenta o domínio das variáveis de decisão.



### 4.1.3 Modelo Cobertura Total de Detecção Probabilístico (CTPRB)

No CTPRB o  $P_{kij}$  é definido por meio da multiplicação de uma probabilidade máxima de detecção  $Prob_{Max}$  (um valor menor ou igual a 1) e a Função de Fermi, apresentada na expressão (2.16). O algoritmo retorna zero para as situações em que há terra entre o alvo e o receptor ou entre o alvo e a fonte. O Algoritmo (2) representa a sub-rotina para obter  $P_{kij}$ . Os parâmetros de entrada são os mesmos definidos no Algoritmo (1) e o resultado do algoritmo é a probabilidade de detecção de um alvo, considerando uma fonte e um receptor.

---

**Algoritmo 2:** Sub-rotina de Probabilidade de Detecção PROB

---

**Entrada:**  $i, j, k, matriz_{pos}, matriz_{pri}, Escala, \rho_0, conjunto$

**Saída:**  $P_{i,j,k}$

- 1 Definir uma lista ( $Lista_{quad}$ ) de pontos entre  $i$  e  $k$  e entre  $j$  e  $k$ ;
  - 2 Se pelo menos um ponto da lista  $Lista_{quad}$  for uma região de terra  $P_{i,j,k} = 0$ , caso contrário  $P_{i,j,k} = Prob_{Max} \left( 1 + 10^{\left( \frac{prst - \rho_0}{b\rho_0} \right)} \right)^{-1}$ .
- 

$$1 - \prod_{(i,j) \in G} (1 - P_{i,j,k} s_i r_j) \geq D_k \quad k \in G \quad (4.8)$$

A restrição (4.8) determina que a probabilidade de detecção de um quadrado deve ser maior ou igual a uma probabilidade de detecção  $D_k$  definida para esse quadrado, para diferentes combinações de fontes e receptores.

Com o intuito de simplificar o modelo, uma transformação logarítmica da restrição (4.8) foi realizada resultando em:

$$\log \left( \prod_{(i,j) \in G} (1 - P_{i,j,k} s_i r_j) \right) \leq \log(1 - D_k) \quad k \in G \quad (4.9)$$

Sabendo que o  $s_i$  e  $r_j$  são binários, a Desigualdade (4.9) pode ser escrita segundo a Desigualdade (4.10).

$$\sum_{(i,j) \in G} \log(1 - P_{i,j,k}) s_i r_j \leq \log(1 - D_k) \quad k \in G \quad (4.10)$$

Então, respeitando que os valores dos logaritmos são negativos, a Desigualdade (4.10) pode ser reescrita como:

$$\sum_{(i,j) \in G} \frac{\log(1 - P_{i,j,k})}{\log(1 - D_k)} s_i r_j \geq 1 \quad k \in G \quad (4.11)$$

Por fim, o modelo matemático CTPRB é formado pela Equação (4.1), que representa a função cujo objetivo é minimizar o custo de cobertura. O modelo é completado pelas restrições (4.11) e (4.3).

#### 4.1.4 Modelo Cobertura Parcial de Detecção Probabilístico (CPPRB)

Neste modelo o  $P_{kij}$  é calculado utilizando o modelo de sensor probabilístico, como apresentado na seção 4.1.3 e no Algoritmo 2.

$$\sum_{(i,j) \in G} \frac{\log(1 - P_{i,j,k})}{\log(1 - D_k)} s_i r_j \geq x_k \quad k \in G \quad (4.12)$$

A Desigualdade (4.12) indica que para um quadrado ser coberto, as somas das probabilidades de detecção dos conjuntos de fontes e receptores devem ser maiores ou igual a um valor de probabilidade definido para o quadrado. Então, o modelo matemático pode ser escrito como a função objetivo, expressa na Equação (4.4), que maximiza a área coberta e as restrições (4.12), (4.6) e (4.7).

#### 4.1.5 Comparação entre os Modelos

Na Figura 4.2 é ilustrado o processo de comparação entre os modelos de cobertura total e de cobertura parcial. Cada etapa será mais bem detalhada no decorrer dessa seção.

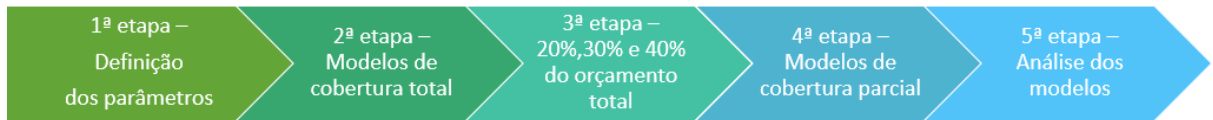


Figura 4.2: Etapas de Comparação entre os Modelos

Para comparar os modelos, primeiro foram definidos os parâmetros de entrada: custo da fonte e receptor, considerando que a fonte é mais cara que o receptor; três alcances do dia com diferentes valores, pois o objetivo é analisar os desempenhos dos modelos conforme os  $RoD$  aumentam; o parâmetro  $b$  da Função de Fermi; as probabilidades mínimas de detecção e os pesos de cobertura por sub-regiões. Para analisar os desempenhos dos modelos foram utilizados apenas a menor escala (1 : 500m) para cada mapa.

Em uma primeira fase foi calculada a cobertura total das regiões empregando os modelos CTCC e CTPRB para os diferentes valores de alcances do dia, com o objetivo de obter o custo total de cobertura. Ao utilizar o modelo CTPRB, inicialmente foi utilizada uma probabilidade de mínima de detecção homogênea para as sub-regiões, ou seja, todos os quadrados do *grid* apresentam a mesma probabilidade mínima de detecção. Então, novamente o modelo CTPRB foi aplicado, mas dessa vez utilizando diferentes probabilidades mínimas de detecção para as sub-regiões.

Como são muito elevados os custos para cobrir 100% das áreas estudadas e visando a simular uma situação mais realista, foi proposta a utilização de 20%, 30% e 40% dos custos totais de cobertura para então implementar os modelos de cobertura parcial. Foram propostas essas restrições orçamentárias, pois em muitos projetos desenvolvidos pela MB sempre há um limite orçamentário, tornando a cobertura total de uma região muito cara e inviável de ser aplicada. Para comparar os dois

modelos, foi selecionado o custo total de maior valor obtido pelos modelos CTCC e CTPRO.

Então, utilizou-se os modelos CPCC e CPPRB, que objetivam maximizar a cobertura de uma região atendendo primeiramente as regiões com maior prioridade, além de considerar um limite orçamentário. Para o modelo CPPRB foram feitas duas análises distintas: a primeira consiste em utilizar probabilidade de detecção mínima igual para as sub-regiões; na segunda foram utilizadas diferentes probabilidades mínimas de detecção para as sub-regiões.

Por último, é realizada a análise dos resultados obtidos para os modelos com diferentes alcances do dia, verificando qual modelo obteve melhor cobertura. Além disso, foram verificados os tempos de execução e o *gap* oriundo de cada modelo ao ser executado por um otimizador.

# Capítulo 5

## Métodos de Resolução Não Linear

Esse capítulo tem a finalidade de apresentar os métodos de resolução implementados nesse estudo, que visam a obter melhores desempenhos do Modelo de Cobertura Parcial de Detecção Probabilístico. Serão apresentados os conceitos de Relaxação Lagrangiana, dualidade e o Método de Feixes.

### 5.1 Relaxação Lagrangiana e Dualidade

Segundo BONNANS *et al.* (2006), a relaxação lagrangiana é uma das maneiras de obter a solução dual do problema primal. A partir da solução dual, é possível obter informação sobre o problema primal. Dependendo da estrutura do problema primal, poderia ser possível recuperar a solução primal (como acontece em programação linear ou convexa) ou, pelo menos, obter limites inferiores de melhor qualidade que os fornecidos pela relaxação linear. Um caso de destaque acontece quando o problema primal é modificado, de forma adequada, com restrições redundantes a fim de definir o *lagrangiano sharp*. Neste caso pode levar à solução do problema primal mesmo com a presença de variáveis inteiras e falta de convexidade.

Considerando um problema de minimização, que chamaremos de problema primal, definido pelas Equações (5.1), (5.2) e (5.3), onde a primeira equação é a função objetivo e as duas restantes são as restrições do problema, que podem ser expressas por meio de relações não lineares. Por fim, a restrição genérica  $x \in U$  engloba outros tipos de restrições que não serão objetivo de relação Lagrangiana (por exemplo, restrições de integralidade).

$$\min_{x \in U} f(x) \tag{5.1}$$

$$h(x) = 0 \tag{5.2}$$

$$g(x) \leq 0 \tag{5.3}$$

Considerando um problema em que os dois conjuntos de restrições são relaxadas, a função dual é definida segundo a Equação (5.4), e a Equação (5.5) representa o domínio das variáveis de decisão:

$$\theta(\lambda, \mu) = \inf_{x \in U} L(x, \lambda, \mu) \tag{5.4}$$

$$\mu \geq 0 \tag{5.5}$$

A função lagrangiana  $L(x, \lambda, \mu)$  é definida na Equação (5.6). As variáveis  $\mu$  e  $\lambda$  são chamadas de variáveis duais, sendo que a variável  $\mu$  é associada às restrições de desigualdades e deve ser não negativa (em todas as suas componentes). O  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa o produto escalar Euclidiano.

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \langle \lambda, h(x) \rangle + \langle \mu, g(x) \rangle, \quad (5.6)$$

O problema dual é definido por meio da Equação (5.7) e consiste em maximizar a função dual.

$$\max_{\mu \geq 0} \theta(\lambda, \mu) \quad (5.7)$$

A função dual é sempre côncava e tipicamente não linear e não diferenciável. Um caso de exceção é quando o problema primal é linear. Neste caso, o problema dual também será um problema de programação linear. Nos casos restantes, é necessário resolver o problema dual usando algoritmos adequados para programação convexa não diferenciável. Nestes casos, é necessário fornecer ao algoritmo tanto o valor da função dual, que é calculado minimizando a função lagrangiana, e o subgradiente. Segundo BONNANS *et al.* (2006) o subgradiente da função dual pode ser obtido conforme Equação (5.8), sendo  $x_\lambda$  e  $x_\mu$  soluções de (5.4).

$$- (h(x_\lambda), g(x_\mu)) \in \partial(-\theta) (\lambda, \mu) \quad (5.8)$$

Quando o valor ótimo do problema primal é diferente do problema dual, existe a chamada brecha de dualidade (*gap*) (IZMAILOV e SOLODOV, 2018).

Assim, a técnica conhecida como Relaxação Lagrangiana consiste em relaxar um conjunto de restrições de interesse, definir a função dual e resolvê-la. O valor ótimo deste é um limite inferior para o problema de minimização do primal (ou um limite superior caso o problema seja de maximização) (FISHER, 1981). A relaxação lagrangiana é aplicada em problemas de otimização combinatória, que resultam em bons limites inferiores e superiores do problema primal. Nesse método, as restrições difíceis são retiradas dos conjuntos de restrições e incluídas na função objetivo (GOMES, 2008).

Na literatura há alguns métodos para resolver problemas da relaxação lagrangiana. GOMES (2008) empregou o Método de Subgradiente. ZHAO e LUH (2002) e DANACH *et al.* (2019) utilizaram o Método de Feixes e TIWARI *et al.* (2021) aplicaram o Método dos Planos Cortantes.

## 5.2 Método de Feixes

O Método de Feixes (do inglês *Bundle Methods*) é um método empregado em funções convexas não diferenciáveis, utilizado em problemas de minimização como, por exemplo, a Equação (5.9). O conjunto de pontos utilizado no problema  $z_i \in \mathbf{R}^n$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ , e o conjunto dos subgradientes  $y_i \in \partial f(z_i)$  são chamados de feixes (IZMAILOV e SOLODOV, 2018). Uma grande vantagem desse método é a sua estabilidade, podendo ser considerado uma versão mais estável do Método de Planos Cortantes (BONNANS *et al.*, 2006). Isso ocorre devido a inserção de um termo quadrático na aproximação da função objetivo (5.10) do Método de Planos Cortantes. Além do mais, são selecionados apenas passos que garantem melhores

resultados, definidos como passos sérios (MONTIBELLER, 2003). IZMAILOV e SOLODOV (2018) também afirmam que esse método ocupa menos memória computacional que o Método de Planos Cortantes, pois não guarda todas as informações dos cortes anteriores, limitando a um determinado número. O histórico é guardado em uma função agregada.

$$\min f(x) \quad x \in \mathbf{R}^n \quad (5.9)$$

$$\min \psi_k(x) + \frac{\gamma_k}{2} \|x - x_k\|^2 \quad (5.10)$$

Onde:

$$\psi_k(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \max_{i=0,1,\dots,k} \{f(z_i) + \langle y_i, x - z_i \rangle\} \quad (5.11)$$

Como a função de aproximação é sempre menor ou igual a função  $f(x)$ , então:

$$f(x) \geq \psi_k(x) \quad x \in \mathbf{R}^n \quad (5.12)$$

O  $z_k$  é solução da função (5.10) para  $i = k - 1$  e o  $y_k$  é o subgradiente dessa função nesse ponto.

O  $\gamma_k$  é um parâmetro estabilizador e deve ser maior que zero. O  $x_k$  é um centro de estabilização do problema, que não necessita ser igual a  $z_k$ , essa igualdade será verdadeira se o passo for sério.

As etapas do Método de Feixes são apresentadas no Algoritmo 3:

---

**Algoritmo 3:** Método de Feixes

---

**Entrada:**  $f(x), \gamma_k, \varepsilon, \alpha$ , número de feixes,  $x_0$

**Saída:**  $f(\bar{x})$  para  $\bar{x}$  solução do problema

- 1 Assumir o número máximo de feixes, escolher  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ , definir um valor de parada  $\varepsilon$ ,  $k$  igual a zero, escolher  $\alpha \in (0, 1)$ , calcular  $f(x_0)$  e  $y_0 \in \partial f(z_0)$ , definir  $z_0 := x_0$ ;
  - 2 Escolher o valor do  $\gamma_k$ , calcular  $z_{k+1}$  como solução do problema (5.10);
  - 3 Calcular  $f(z_{k+1})$  e  $y_{k+1} \in \partial f(z_{k+1})$ , sabendo que  $\Delta_k = f(x_k) - \psi_k(z_{k+1}) - \frac{\gamma_k}{2} \|z_{k+1} - x_k\|^2$ , se  $\varepsilon \geq \Delta_k$  parar o método, caso contrário ir para a etapa 4;
  - 4 Se  $f(x_k) - f(z_{k+1}) \geq \alpha \Delta_k$ , o passo é sério e  $x_{k+1} = z_{k+1}$ , caso contrário o passo é nulo e  $x_{k+1} = x_k$ ;
  - 5 Definir o novo conjunto de feixes, atualizar o  $k := k + 1$  e ir para a etapa 2.
-

### 5.3 Método de Feixe para Solução do Problema Dual

No estudo foi escolhido utilizar o Método de Feixes, pois entre os métodos não diferenciáveis é o mais estável e garante melhores resultados. O objetivo de aplicar esse método é resolver o problema dual do Modelo Cobertura Parcial de Detecção Probabilístico para obter um melhor limite superior e assim, garantir melhores resultados ao implementar o otimizador. Essa estratégia foi adotada, pois foi verificado que o problema em obter melhores soluções estava no limitante dual, pois na maioria dos casos, não havia melhoria desse limitante conforme o otimizador realizava as iterações.

O problema dual estudado nesse trabalho é apresentado a seguir:

$$\max \theta(\mu) \tag{5.13}$$

$$\mu \geq 0 \tag{5.14}$$

Sabendo que a função dual pode ser escrita conforme a Equação (5.15) e a restrição (5.16) determina o domínio das variáveis de decisão.

$$\begin{aligned} \theta(\mu) = \min \sum_{k \in G} -M_k x_k + \mu_k \left( x_k - \sum_{(i,j) \in G} \frac{\log(1 - P_{i,j,k})}{\log(1 - D_k)} s_i r_j \right) \\ + \mu_{k+1} \left( C^s \sum_{i \in G} s_i + C^r \sum_{j \in G} r_j - V \right) \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$s_i, r_j, x_k \in \{0, 1\} \quad i, j, k \in G \tag{5.16}$$

Conforme apresentado na Equação (5.8), o subgradiente do problema em estudo pode ser calculado por meio da Equação (5.17), sendo  $x_\mu$ ,  $s_\mu$  e  $r_\mu$  soluções do problema dual para um determinado conjunto de  $\mu$ . Considerando que  $g(x_\mu, s_\mu, r_\mu)$  é o conjunto de restrições relaxadas, que são apresentadas na restrição (4.12) e  $g_2(s_\mu, r_\mu)$  é a outra restrição relaxada que é definida na restrição (4.6).

$$- (g(x_\mu, s_\mu, r_\mu), g_2(s_\mu, r_\mu)) \in \partial(-\theta)(\mu) \tag{5.17}$$

### 5.4 Método de Feixe para Solução do Problema Dual com Lagrangeano Sharp

Fora do escopo da programação linear, a situação típica é da existência de uma brecha de dualidade positiva. Com isto, após resolver o problema dual, só é possível achar um limite inferior, sem estimativa do valor ótimo do problema primal. Também neste caso, é difícil obter uma estimativa da solução primal, restando, muitas vezes, recorrer a heurísticas para tentar construir valores primais, porém com limi-

tado sucesso. Por conta destas dificuldades recorrentes da existência de uma brecha de dualidade positiva, tem sido proposto adicionar mais restrições redundantes que possam ajudar na definição de uma função dual e, assim, produzir situações com brecha de dualidade nula. Considerando um problema primal

$$\begin{aligned} \min_{x \in U} \quad & f(x) \\ & F(x) = 0 \end{aligned}$$

onde só se tem interesse na relaxação de restrições de igualdade  $F(x) = 0$ , podemos modificar o problema adicionando a restrição  $\|F(x)\| = 0$ , produzindo um novo problema primal

$$\begin{aligned} \min_{x \in U} \quad & f(x) \\ & F(x) = 0 \\ & \|F(x)\| = 0 \end{aligned}$$

equivalente ao inicial, mas cujo problema dual terá agora estrutura diferente. Além disso,  $\|F(x)\|$  representa qualquer tipo de função norma, como exemplo, norma L2 ou norma infinita. Segundo DE MELO (2009); ROCKAFELLAR e WETS (2009), o valor ótimo deste novo problema dual será igual ao valor ótimo do problema primal, isto é, terá uma brecha de dualidade nula. Note-se que neste caso, a função lagrangiana será dada pela Equação (5.18). Neste caso, uma variável dual  $r \geq 0$  é adicionada. Devido à propriedade de poder fechar a brecha de dualidade, este novo lagrangiano é chamado de *lagrangiano sharp*.

$$L(x, \lambda, r) = f(x) + \langle \lambda, F(x) \rangle + r\|F(x)\| \quad (5.18)$$

Para o desenvolvimento na nova função dual, apenas a restrição (4.12) foi relaxada e necessitou-se incluir uma variável de folga  $w_k$ ,  $k \in G$ , para que o conjunto de restrições relaxadas fosse igual a zero, conforme apresentado nas Equações (5.19),(5.20) e (5.21)

$$F(s, r, x, w) = (F_1(s, r, x, w), F_2(s, r, x, w), \dots, F_k(s, r, x, w)) \quad (5.19)$$

Onde:

$$F_k(s, r, x, w) = - \sum_{(i,j) \in G} \frac{\log(1 - P_{i,j,k})}{\log(1 - D_k)} s_i r_j + x_k + w_k \quad k \in G \quad (5.20)$$

$$F(s, r, x, w) = 0 \quad (5.21)$$

Optou-se por utilizar a norma L1 e a norma infinita. Desta forma, foram implementadas duas funções duais, segundo a Equação (5.22) e a Equação (5.23) e as duas equações sujeito a (4.6) e (5.24).

$$\theta_1(\lambda, r) = \min \sum_{k \in G} -M_k x_k + \langle \lambda, F(s, r, x, w) \rangle + r\|F(s, r, x, w)\|_1 \quad (5.22)$$

$$\theta_\infty(\lambda, r) = \min \sum_{k \in G} -M_k x_k + \langle \lambda, F(s, r, x, w) \rangle + r\|F(s, r, x, w)\|_\infty \quad (5.23)$$



$$s_i, r_j, x_k, w_k \in \{0, 1\} \quad \forall i, j, k \in G \quad (5.24)$$

o subgradiente dos problemas duais estudados podem ser calculados por meio da Equação (5.25) e (5.26) respectivamente, lembrando que  $x_{\lambda,r}$ ,  $s_{\lambda,r}$ ,  $r_{\lambda,r}$  e  $w_{\lambda,r}$  são soluções do problema dual para um determinado conjunto de  $\lambda$  e  $r$ .

$$- (F(s_{\lambda,r}, r_{\lambda,r}, x_{\lambda,r}, w_{\lambda,r}), \|F(s_{\lambda,r}, r_{\lambda,r}, x_{\lambda,r}, w_{\lambda,r})\|_1) \in \partial(-\theta_1)(\lambda, r) \quad (5.25)$$

$$- (F(s_{\lambda,r}, r_{\lambda,r}, x_{\lambda,r}, w_{\lambda,r}), \|F(s_{\lambda,r}, r_{\lambda,r}, x_{\lambda,r}, w_{\lambda,r})\|_\infty) \in \partial(-\theta_\infty)(\lambda, r) \quad (5.26)$$

# Capítulo 6

## Heurísticas

Os métodos exatos são empregados para encontrar a melhor solução. Entretanto, conforme aumenta a complexidade do problema, esses métodos podem obter o ótimo global em um tempo computacionalmente muito elevado e, em alguns casos, não chegando a melhor solução. Uma boa alternativa em relação aos métodos exatos são as heurísticas, que são técnicas que obtêm resultados satisfatórios, não necessariamente o melhor resultado. Além disso, são executadas em tempos computacionais aceitáveis para serem usados em problemas reais. As heurísticas também podem ser empregadas para melhorar o desempenho de modelos exatos, pois podem ser usadas como solução inicial desses modelos. Outra vantagem ao utilizá-las é a facilidade de se poder repetir o mesmo problema várias vezes em um tempo de execução curto (ZANAKIS e EVANS, 1981).

Os problemas de Otimização Combinatória são problemas complexos de serem resolvidos, uma das estratégias é aplicar os métodos de aproximação. Esses podem ser definidos em dois tipos: o primeiro tipo engloba os métodos construtivos, que são heurísticas que obtêm soluções em tempos computacionais muito curtos, porém de qualidades não muito boa; o outro tipo engloba os métodos de buscas locais, esses utilizam os algoritmos construtivos como solução inicial e buscam soluções melhores no espaço de vizinhança a cada iteração. Nos últimos anos, um novo tipo de método de aproximação vem ganhando destaque, são as metaheurísticas. Essas têm como finalidade encontrar soluções de melhor qualidade e buscam escapar de ótimos locais de baixa qualidade. Algumas metaheurísticas conhecidas são: Colônia de Formiga, Algoritmo Genético, Busca Tabu e *Simulated Annealing* (BLUM e ROLI, 2003).

Nesta seção serão apresentados três métodos desenvolvidos neste trabalho com o objetivo de resolver o problema de localização dos sensores do sistema multistáticos empregando o modelo de sensor probabilístico e considerando que há uma limitação orçamentária. Foram desenvolvidas as seguintes heurísticas: Heurística Gulosa Randômica, Heurística de Troca e por fim *Simulated Annealing*. O desenvolvimento dessas heurísticas tem como finalidade utilizar *grids* (malhas) maiores e fornecer soluções boas em um menor tempo computacional.

### 6.1 Heurística Gulosa

As heurísticas construtivas ou também conhecidos como algoritmos gulosos são muito utilizados em diversos problemas de otimização combinatória, principalmente em problemas que são difíceis de serem resolvidos por métodos exatos. Esses algo-

ritmos consistem em realizar a melhor escolha a cada iteração, pois após efetuá-la não há possibilidade de voltar atrás. Desta forma, é encontrada uma boa solução, porém não será um ótimo global (CURTIS, 2003).

Para HOCHBAUM (1994), as heurísticas gulosas podem ser utilizadas como limites superiores e limites inferiores para problemas de localização, podendo ser resolvidas em tempos polinomiais.

Na literatura é possível encontrar diversos trabalhos de Problemas de Localização de Máxima Cobertura que utilizam heurísticas gulosas. XIA *et al.* (2009) implementaram uma heurística construtiva para ser aplicada a distintos problemas de MCLP. AL-RABIAAH *et al.* (2022) desenvolveram uma heurística para localização de *Drones*, com o objetivo de cobrir uma maior quantidade de clientes.

### 6.1.1 Heurística Gulosa Randômica (HGR)

Neste estudo, foi desenvolvido uma Heurística Gulosa Randômica (HGR) para resolver o problema de colocação de fontes e receptores, considerando um limite orçamentário e empregando o modelo de sensor probabilístico.

O início da heurística consiste em posicionar uma fonte em uma região de alta relevância de cobertura, sendo aquelas com maior peso de cobertura, ou regiões muito próximas das áreas de maior prioridade de cobertura. O local de instalação é escolhido de forma aleatória. Em seguida, são instalados até  $N$  receptores vinculados à fonte. Os receptores também são instalados de forma aleatória, porém há uma restrição de não posicionar os receptores em regiões que já estão cobertas. Este processo de instalação de fontes e receptores é realizado até atingir o limite orçamentário ou até que a região de alta prioridade esteja 100% coberta. Caso ainda haja recurso financeiro e a região de prioridade máxima esteja toda coberta, o mesmo processo é realizado para a região de prioridade média e para a região de prioridade baixa de cobertura, respectivamente.

O Algoritmo 4 ilustra como é executada a Heurística Gulosa Randômica. As entradas do algoritmo são: um matriz ( $Matriz_{zpri}$ ) contendo o mapa da região, em que o número zero representa terra e os números de 1 a 3 identificam as prioridades de cobertura das regiões marítimas, sendo que o número 3 identifica o de maior prioridade; uma lista denominada *prob*, contendo os valores de probabilidade mínima de cobertura para cada quadrado das sub-regiões; Custo de uma fonte ( $C^s$ ); custo de um receptor ( $C^r$ ); valor do limite orçamentário para o emprego dos sensores ( $V$ ); a escala do mapa (Escala); o alcance do dia ( $RoD$ ); o número máximo de tentativas de posicionar receptores vinculados a uma fonte ( $N$ ); os conjuntos dos quadrados que estão entre duas regiões de terra, mas representam um canal (*Conjuntos*); por fim, a função objetivo  $f(x)$ , que visa a calcular o peso das regiões cobertas. A heurística fornece uma lista com a posição em que devem ser instaladas as fontes; uma lista com a posição dos receptores; uma lista dos quadrados que foram cobertos; a solução dos custos de cobertura ( $FO$ ), quanto maior melhor; e por último, uma lista contendo o somatório da probabilidade de cobertura de cada quadrado.

---

**Algoritmo 4:** Heurística Construtiva Randômica

---

**Entrada:**  $Matriz_{pri}, prob, C^s, C^r, V, Escala, RoD, N, f(x), Conjuntos$

**Saída:**  $Fontes, Receptores, Cobertura, prob_{cobertura}, FO$

- 1 Definir uma lista com as regiões de prioridade de cobertura, começando com a região de maior prioridade e terminando com a região de menor prioridade;
  - 2 Incluir uma fonte de forma aleatória em uma região de prioridade de cobertura definida no passo 1 ou incluir essa fonte em uma região muito próxima da região prioritária definida no passo 1;
  - 3 Incluir até  $N$  receptores vinculados a fonte;
  - 4 Caso a região de prioridade definida no passo 1 não esteja 100% coberta e  $f(Fontes, receptores) + C^s \leq V$ , voltar para o passo 2. Caso contrário, ir para o passo 5;
  - 5 Caso a região de prioridade definida no passo 1 esteja 100% coberta e  $f(Fontes, receptores) + C^s \leq V$ , voltar para o passo 1. Caso contrário, ir para o passo 6;
  - 6 Se  $f(Fontes, receptores) + C^s > V$  e  $f(Fontes, receptores) < V$ , instar um receptor vinculado a uma fonte. Caso contrário, ir para o passo 7;
  - 7 Caso não haja mais recurso disponível, finalizar o algoritmo. Caso contrário, ir para o passo 6.
- 

## 6.2 Heurística de Trocas

Segundo WHITAKER (1983), em problemas de localização com grande quantidade de conjunto de dados, a utilização de uma heurística gulosa de trocas é uma ótima alternativa para obter bons resultados. A heurística necessita de uma solução inicial, podendo ser fornecida por uma heurística gulosa. A solução vigente é trocada quando o algoritmo encontra uma solução melhor. O processo iterativo de troca da melhor solução é realizado até encontrar uma solução boa para algoritmo. Conforme (CHURCH e REVELLE, 1974), um algoritmo de substituição obtém bons resultados, entretanto não há garantia que um ótimo global será encontrado.

Para BLUM e ROLI (2003), as heurísticas de trocas são denominadas de heurística de melhoria iterativa. O seu desempenho depende da solução inicial, do conjunto de vizinhança e da função de desempenho. Os autores consideram que o número máximo de iterações pode ser definido como o critério de parada do algoritmo.

### 6.2.1 Heurística de Trocas para o Problema de Cobertura

Nesse estudo foi implementado uma Heurística de Trocas (HT), essa heurística procura soluções melhores no espaço de vizinhança, aceitando apenas soluções me-

lhores e rejeitando soluções piores. Para iniciar a heurística, o primeiro passo é fornecer a solução da HGR. Em seguida são buscadas novas soluções em um conjunto de soluções vizinhas  $N(s)$  por meio de uma busca local. A busca local usada será detalhada na Seção 6.5. Os movimentos que compõem a busca local são escolhidos de forma aleatória. É importante ressaltar que  $S$  é um espaço de soluções viáveis e  $s \in S$ . Quando uma busca obtém uma melhor solução, essa é guardada e torna-se a solução vigente. Além disso, são realizadas até 500 iterações (buscas) sem que haja melhoria. Caso um melhor valor for obtido, o contador zera e novamente é reinicializada as iterações até chegar ao critério de parada, seja as 500 iterações sem melhorias ou um número máximo de iterações totais (1500 iterações). Esse último critério de parada é apenas utilizado em instâncias muito grandes, em problemas com mais de 2000 quadrados de água.

Outro fator de extrema importância na performance do algoritmo é a probabilidade de escolha de um movimento. No início do algoritmo, todos os movimentos têm a mesma probabilidade de serem selecionados e apresentam peso igual a 1. Porém, conforme um movimento resulta em uma melhor solução o peso do movimento aumenta 0,5 e conseqüentemente há maior probabilidade desse movimento ser escolhido novamente. A equação que representa a probabilidade de seleção de um movimento ( $ProbMov_i$ ) é apresentada na Equação (6.1), onde  $mov$  é o conjunto de movimentos que compõem a busca local e  $i \in mov$ .

$$ProbMov_i = \frac{PesoMov_i}{\sum_{j \in mov} PesoMov_j} \quad \forall i \in mov \quad (6.1)$$

Essa estratégia de alterar a probabilidade de seleção de um movimento foi incorporada à heurística após ser realizada uma análise preliminar com algumas instâncias. Para realizar a análise, comparou-se os resultados obtidos quando utilizada a mesma probabilidade de escolha dos movimentos e quando aplicado diferentes probabilidades de escolha dos movimentos. Essa última probabilidade pode ser estimada pela Equação 6.1. Foram utilizadas 20 instâncias, conforme apresentado na Figura 6.1, e verificou-se que, ao alterar a probabilidade de seleção de um movimento, melhores resultados foram obtidos.

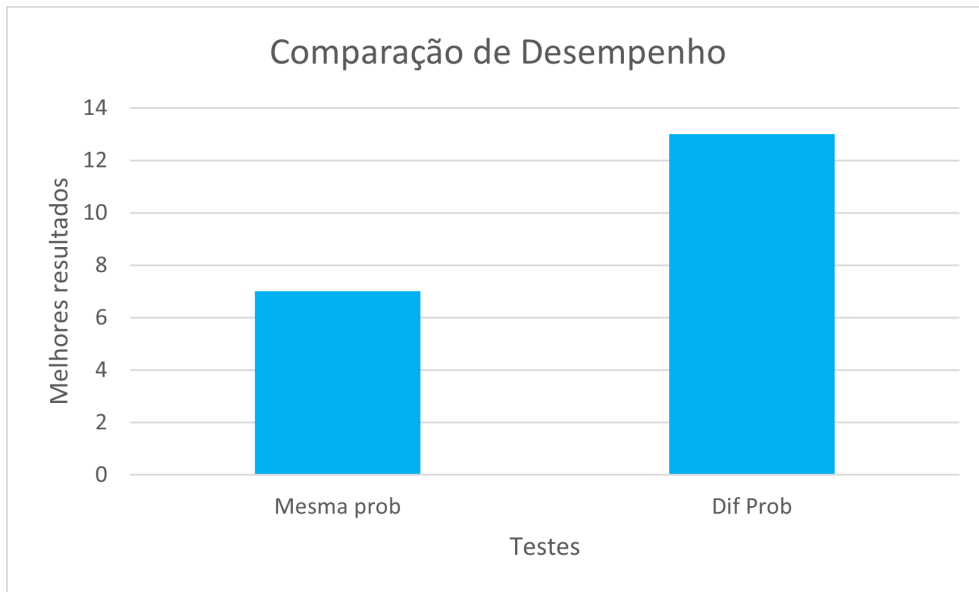


Figura 6.1: Comparação do Desempenho Utilizando Probabilidades Iguais e Diferentes

O Algoritmo 5 representa como é executada a Heurística de Trocas. As entradas do algoritmo são: uma solução inicial ( $s^*$ ) obtida pela Heurística Gulosa Randômica; a função objetivo  $f(x)$ , que visa a calcular o peso das regiões cobertas; uma estrutura de vizinhança  $N(x)$ , obtida através dos movimentos da Busca Local que será apresentado na Seção 6.5; uma tabela contendo o mapa da região, em que o número zero representa terra e os números de 1 a 3 identificam a prioridade de cobertura da região marítima, sendo 3 mais prioritário; uma lista denominada *prob*, contendo os valores de probabilidade mínima de cobertura para as sub-regiões; Custo de uma fonte ( $C^s$ ); custo de um receptor ( $C^r$ ); valor do limite orçamentário para o emprego dos sensores ( $V$ ); a escala do mapa (*Escala*), o alcance do dia (*RoD*); os conjuntos de quadrados que estão entre duas regiões de terra, mas representam um canal (*Conjuntos*); e, por fim, o passo (*Passo*), que define o número máximo de quadrados em que alguns movimentos da busca local podem se deslocar. A heurística fornece uma solução final que engloba: uma lista com a posição em que devem ser instaladas as fontes; uma lista com a posição dos receptores; uma lista dos quadrados do *grid* que foram cobertos; o valor do somatório dos pesos de cobertura; a probabilidade de detecção de um alvo em cada quadrado; o tempo de execução da heurística; uma lista que engloba todas as soluções obtidas pelo algoritmo; e por fim a quantidade de vezes que um movimento resultou em uma melhor solução.

---

**Algoritmo 5:** Heurística de Trocas

---

**Entrada:**  $s^*$ ,  $f(x)$ ,  $N(x)$ , *Matriz<sub>pri</sub>*, *prob*,  $C^s$ ,  $C^r$ ,  $V$ , *Escala*, *RoD*,  
*Conjuntos*, *Passo*

**Saída:**  $s_{final}$

- 1 Definir  $s_{final} = s^*$ ,  $s_{new} = s^*$   $cont = 0$ ;
  - 2 Se  $cont < 500$  ir para o passo 3, caso contrário parar o algoritmo;
  - 3 Buscar uma nova solução por meio de  $s_{new} = N(s_{final})$  e  $cont = cont + 1$ ;
  - 4 Se  $s_{new} \geq s_{final}$ , então  $s_{final} = s_{new}$  e  $cont = 0$ , retornar para o passo 2.
- 

### 6.3 *Simulated Annealing*

O *Simulated Annealing*, em português Recozimento Simulado, é uma heurística que pode ser utilizada para resolver diversos problemas de otimização combinatória. Tal heurística apresenta bons resultados, exige pouca memória computacional e também busca escapar de ótimos locais de baixa qualidade. Além disso, ela é empregada tanto para problemas de maximização quanto de minimização, podendo ser aplicada para um ou múltiplos objetivos SUMAN e KUMAR (2006).

KIRKPATRICK *et al.* (1983) e ČERNÝ (1985) foram os primeiros a aplicar o *Simulated Annealing* em problemas de otimização combinatória. Essa metaheurística foi baseada no trabalho de METROPOLIS *et al.* (1953), em que o processo de otimização computacional simula o processo de recozimento de metais. Segundo JOHNSON *et al.* (1989), o recozimento de um metal pode ser definido pelo processo de resfriar um material que está a uma elevada temperatura (alta energia) até um ponto de baixa energia (estado sólido). Caso esse material seja resfriado muito rápido, pode trazer danos a estrutura do metal, por isso o material deve ser resfriado lentamente. Os mesmos autores consideram que esse processo de resfriamento de metal pode ser comparado ao algoritmo do *Simulated Annealing*, em que as soluções de problema de otimização são equivalentes aos estados do sistema físico do material e o ótimo local obtido pelo algoritmo é representado pelo metal que foi aquecido de maneira rápida.

Segundo XIA *et al.* (2009) alguns parâmetros e variáveis são fundamentais para a execução do SA: solução inicial ( $s_0$ ); temperatura inicial ( $T_0$ ); um valor de tolerância para temperatura ( $tol$ ); temperatura atual ( $T$ ); taxa de resfriamento ( $\alpha$ ); número máximo de iterações para uma temperatura ( $iter_{max}$ ); atual iteração em uma temperatura ( $iter$ ); antigo valor da solução ( $s_{old}$ ); novo valor de solução ( $s_{new}$ ).

Para JOHNSON *et al.* (1989); MURRAY e CHURCH (1996); XIA *et al.* (2009) o algoritmo do *Simulated Annealing* pode ser escrito segundo o Algoritmo 6.

---

**Algoritmo 6:** *Simulated Annealing*

---

**Entrada:**  $s_0$ ,  $\alpha$ ,  $tol$ ,  $iter_{max}$ ,  $T_0$ **Saída:**  $s_{final}$ 

- 1 Obter a  $T_0$  e definir  $s_{old}$  como o  $s_0$ ;
  - 2 Se  $T > tol$ , ir para a etapa 3. Caso contrário parar o algoritmo e informar a melhor solução encontrada ( $s_{final}$ );
  - 3 Se  $iter < iter_{max}$ , ir para o passo 4. Caso contrário,  $T = T\alpha$ ,  $iter = 0$  e ir para o item 2;
  - 4 Por meio da solução atual ( $s_{old}$ ) gerar uma nova solução de forma aleatória (através de busca local) e defini-la como solução nova ( $s_{new}$ ) e  $iter := iter + 1$ ;
  - 5 Se  $s_{new} - s_{old} \leq 0$  aceitar a nova solução. Caso contrário a solução será aceita se passar por um teste de probabilidade. Para isso, a solução será aceita se  $e^{(s_{new}-s_{old})/T} > x$  sendo  $x \in [0, 1]$  e  $x$  é escolhido de forma alheatória. Então, retornar ao passo 2.
- 

O teste de probabilidade para aceitar movimentos de piora depende da temperatura vigente e da diferença entre uma solução nova e uma solução antiga. Conforme a temperatura vigente diminui, menos movimentos de piora são aceitos (MURRAY e CHURCH, 1996). Para COLL *et al.* (2022), em problemas de maximização, o teste de probabilidade pode ser expresso por (6.2).

$$e^{-(s_{new}-s_{old})/T} > x \quad (6.2)$$

COLL *et al.* (2022) afirmam que a temperatura inicial deve ter um valor alto. Além disso, no trabalho de BEN-AMEUR (2004) são apresentadas algumas formulações para obter a temperatura inicial.

Um dos critérios mais importante no desempenho do *Simulated Annealing* é o processo de resfriamento da temperatura. JOHNSON *et al.* (1989); MURRAY e CHURCH (1996); XIA *et al.* (2009) aplicaram o processo de resfriamento multiplicando uma variável  $\alpha$  com a temperatura vigente, sendo  $\alpha$  um valor entre zero e um. Entretanto, há diversas maneiras de realizar o processo de resfriamento da temperatura vigente, no trabalho de (SUMAN e KUMAR, 2006) são apresentadas distintas formas de executar esse processo.

## 6.4 *Simulated Annealing* para o Problema de Cobertura

O *Simulated Annealing* foi a metaheurística escolhida para ser implementada nesse estudo, porque no trabalho de XIA *et al.* (2009) obteve melhor desempenho em comparação a outras heurísticas e metaheurísticas. A grande diferença do presente estudo em comparação ao trabalho realizado por XIA *et al.* (2009) é a quantidade



de tipos de facilidades empregadas, pois no estudo utilizado como referência há apenas um tipo de facilidade, enquanto no presente estudo há dois tipos (receptores e fontes).

No desenvolvimento do *Simulated Annealing* para o problema de cobertura acústica submarina foram considerados quatro fatores importantes: temperatura inicial; processo de resfriamento, critério de parada e probabilidade de um movimento ser escolhido, cada fator será apresentado a seguir.

### 6.4.1 Temperatura Inicial

A temperatura inicial é um dos critérios de extrema importância para o desempenho do algoritmo, pois caso a temperatura seja muito alta, o processo de recozimento pode tornar-se demorado. Por outro lado, se a temperatura for baixa, fará com que o algoritmo não aceite soluções piores e, conseqüentemente, chegue a um ótimo local. No estudo foram analisadas três maneiras de obter as temperaturas iniciais, as duas primeiras técnicas foram apresentadas no trabalho de BEN-AMEUR (2004).

- Primeira Técnica: consiste em iniciar o processo com uma temperatura alta e são feitas algumas iterações. A taxa de aceitação de soluções nessa temperatura deve ser igual ou maior que  $X_0$ . Caso seja inferior, deve-se multiplicar a temperatura por 2 e realizar o processo até obter uma taxa maior ou igual a  $X_0$ ;
- Segunda Técnica: também foi considerada uma taxa de aceitação  $X_0$ , utiliza-se uma temperatura inicial e são feitas algumas iterações para obter a média das soluções que foram piores  $\overline{\Delta E}$ . Por fim, a temperatura inicial pode ser estimada pela Equação (6.3);

$$T_0 = \frac{\overline{\Delta E}}{\ln(X_0)} \quad (6.3)$$

- Terceira Técnica: definir um valor de temperatura inicial igual para todas as instâncias.

A terceira maneira de obter a temperatura inicial foi descartada do estudo, pois um valor único para todos os tamanhos de instâncias não era viável, visto que o valor poderia ser muito alto para instâncias pequenas e compatível para instâncias maiores. Por outro lado, a temperatura poderia ser baixa para instâncias grandes e boa para instâncias menores.

Conforme SUMAN e KUMAR (2006), a taxa de aceitação  $X_0$  deve ser um número entre 0,5 e 0,95. Ao analisar os desempenhos das duas formulações para obter a temperatura inicial e utilizando uma taxa de aceitação de 0,8, não foi possível definir qual temperatura obteve o melhor desempenho para o problema em estudo. Porém verificou-se que a segunda formulação é executada em um tempo mais rápido, e, por isso, essa foi a escolhida para ser empregada nesse presente trabalho.

### 6.4.2 Programa de Resfriamento

O programa de resfriamento determina o quão rápido ou devagar o algoritmo chegará no estado de baixa energia. Um programa de resfriamento muito lento resulta

em um algoritmo muito demorado. Por outro lado, um programa de resfriamento rápido pode provocar resultados não muito bons, levando a um ótimo local. No presente estudo foram analisados três tipos distintos de programas de resfriamento, que foram apresentadas no trabalho de SUMAN e KUMAR (2006), conforme Equações (6.4),(6.5),(6.6) :

- Formulação 1: é formulação logarítmica, depende da temperatura inicial e da iteração  $n$ . A formulação é mostrada na Equação (6.4);

$$T_{n+1} = \frac{T_0}{\ln(n+1)} \quad (6.4)$$

- Formulação 2: depende da multiplicação de uma taxa de resfriamento  $\alpha$  com a temperatura atual, sendo  $\alpha$  entre 0,8 e 0,99;

$$T_{n+1} = T_n \alpha \quad (6.5)$$

- Formulação 3: depende da temperatura atual e de uma constante  $\beta$ .

$$T_{n+1} = \frac{T_n}{1 + \beta T_n} \quad (6.6)$$

Quando analisadas as três formulações para o problema em estudo, foi verificado que a (6.5) obteve melhor resultado. A formulação (6.4) trouxe como consequência um algoritmo extremamente demorado, não sendo viável devido ao alto tempo computacional para resolver o problema. Já a formulação (6.6) chegou em temperaturas baixas muito rápido.

### 6.4.3 Critério de Parada

O critério de parada deve definir o momento em que o algoritmo chega a um ponto em que não haverá mais alterações, ou seja, chega em um estado de equilíbrio. Em diversos trabalhos como, por exemplo, os trabalhos de JOHNSON *et al.* (1989); MURRAY e CHURCH (1996), o critério de parada é um valor de temperatura muito baixo (tolerância), de forma que quando o algoritmo chega a uma temperatura menor ou igual a essa tolerância o mesmo para. Porém, nesse presente trabalho, verificou-se que ao utilizar um valor pequeno de temperatura aconteciam duas situações: na primeira, o algoritmo já havia entrado em um estado de equilíbrio e ficava fazendo iterações desnecessárias até chegar à temperatura de tolerância; na segunda situação, o algoritmo ainda não havia entrado no estado de equilíbrio, podendo encontrar soluções melhores, todavia ele era encerrado. Visando a obter um melhor desempenho do algoritmo, foi considerado como critério de parada o número máximo de iterações (250 iterações) sem que haja qualquer alteração do valor da solução, seja uma melhor solução ou uma pior solução.

Outro critério de parada adotado nesse trabalho foi um número máximo de iterações realizadas durante o processamento do algoritmo (1500 iterações). Entretanto esse critério foi apenas implementado em instâncias com um número elevado de quadrados do *grid*, instâncias com mais de 2000 quadrados de água. Esse critério foi implementado, pois o tempo de execução de instâncias maiores é computacionalmente muito elevado.

#### 6.4.4 Probabilidade de Escolha de um Movimento

Da mesma forma que foi feita uma análise da probabilidade de um movimento da busca local ser escolhido na Heurística de Troca (Seção 6.2), esse estudo foi realizado para o *Simulated Annealing*. Desta forma, a  $ProbMov_i$ , para  $i \in mov$ , depende da quantidade de vezes que o movimento  $i$  obteve uma melhor solução encontrada até então ou obteve uma solução boa. Essa última é considerada nos casos em que a solução nova foi melhor que a solução antiga. A equação para obter a probabilidade de cada movimento é expressa na Equação (6.7).

$$ProbMov_i = \frac{PesoMovI_i + PesoMovM_i + PesoMovQ_i}{\sum_{j \in mov} PesoMovI_j + PesoMovM_j + PesoMovQ_j} \quad \forall i \in mov \quad (6.7)$$

O  $PesoMovI_i$  é definido como o peso inicial para todos os movimentos e são iguais a 1 para cada  $i \in mov$ . O  $PesoMovM_i$  inicia-se em 0 e cada vez que o movimento resultar em uma melhor solução é adicionado 0,5. O  $PesoMovQ_i$  também começa em zero, e quando um movimento obtiver uma solução melhor que a solução anterior é adicionado 0,01. É importante salientar que nesse último caso, o  $s_{new} - s_{old} \geq 0$ , porém  $s_{new}$  não necessita ser a melhor solução até então encontrada pelo algoritmo.

#### 6.4.5 Algoritmo *Simulated Annealing*

O algoritmo do *Simulated Annealing* desenvolvido é muito parecido com o algoritmo 6, as entradas do algoritmo são a mesmas da Heurística de Troca (Seção 6.2), porém são incluídos mais três parâmetros: a temperatura inicial ( $T_0$ ); a taxa de resfriamento ( $\alpha$ ); e o número máximo de iterações em cada temperatura ( $iter_{max}$ ). A heurística fornece uma solução final que engloba: uma lista com a posição em que devem ser instaladas as fontes; uma lista com a posição dos receptores; uma lista dos quadrados do *grid* que foram cobertos; o valor do somatório dos Pesos de cobertura (função objetivo), uma lista com a probabilidade de detecção de um alvo em cada quadrado; o tempo de execução da heurística; a quantidade de vezes que um movimento resultou em uma melhor solução; a quantidade de vezes que um movimento ocasionou um resultado bom, mas não necessariamente o melhor; e uma lista com todas as soluções aceitas no SA.

O algoritmo inicia-se com uma solução inicial obtida pela HGR, a solução é guardada como melhor solução ( $s_{final}$ ) e como solução vigente ( $s_{old}$ ). Para  $T_0$ , enquanto  $iter_{max} > cont$  ( $cont$  inicia em zero) é obtida uma nova solução ( $s_{new}$ ) por meio da busca local. Caso a nova solução seja maior ou igual a solução vigente,  $s_{old}$  será igual a  $s_{new}$ . Caso contrário, realiza o teste de probabilidade apresentado na Equação (6.2). Caso passe no teste,  $s_{old} = s_{new}$ . Em cada iteração  $cont = cont + 1$  até atingir o valor do limite máximo de iteração para cada temperatura. Quando  $iter = cont$ , realiza o processo de resfriamento e inicia-se novamente o processo de procurar solução melhor a cada iteração. O algoritmo irá parar quando atingir 250 iterações sem melhoria ou 1500 iterações (para instâncias muito grandes).

## 6.5 Busca local

O conjunto de vizinhanças de uma solução vigente pode ser um fator determinante para encontrar melhores soluções no problema em estudo. Quando ocorre a alteração da posição de uma fonte e/ou um receptor, é possível que sejam encontradas soluções de melhor desempenho, visto que essa nova estrutura pode cobrir melhor o *grid* do mapa em estudo.

Nessa seção serão apresentados os movimentos que compõem a busca local utilizados para encontrar novas soluções. São eles:

- *Move\_passive*: o algoritmo escolhe um receptor, de forma aleatória, e realiza o movimento na diagonal, na vertical ou na horizontal, podendo se deslocar de 1 quadrado até  $n$  quadrados. A direção e o número de quadrados a ser deslocados são definidos de forma aleatória. O número máximo de quadrados deslocados deve ser menor ou igual ao *Passo*;
- *Move\_active*: o algoritmo escolhe uma fonte, de forma aleatória, e realiza o movimento na diagonal, na vertical ou na horizontal, podendo se deslocar de 1 quadrado até  $n$  quadrados. A direção e o número de quadrados a ser deslocados são definidos de forma aleatória. O número máximo de quadrados deslocados deve ser menor ou igual ao *Passo*;
- *Change\_passive\_active*: é escolhido aleatoriamente uma fonte e subsequente um receptor próximo a fonte, então os dois sensores são trocados de posição;
- *Change\_passive*: o algoritmo escolhe aleatoriamente um receptor e reposiciona ele em outra região que cubra pelo menos um quadrado;
- *Passive\_More\_value*: o algoritmo escolhe um receptor que está em uma região de média ou baixa prioridade, em seguida reposiciona em uma região de maior prioridade;
- *Active\_more\_values*: o algoritmo escolhe uma fonte que está em uma região de média ou baixa prioridade, em seguida reposiciona em uma região de maior prioridade;
- *Passive\_alone*: o algoritmo identifica se há receptores alocados que não cobrem nenhuma região do mapa. Caso for encontrado um ou mais, é selecionado um receptor ( de forma aleatória), esse é reposicionado em uma região que cubra pelo menos um quadrado;
- *Passive\_more\_coverge*: o algoritmo verifica os três receptores que apresentam maior probabilidade de detecção de um alvo, ou seja, maior cobertura. Então é escolhido aleatoriamente um entre os três e reposiciona esse em outra região que cubra pelo menos um quadrado.

Os movimentos da busca local utilizam o mesmo processo para calcular o novo peso de cobertura, exemplificado de forma resumida na Figura 6.2 . Primeiramente é necessário tirar o sensor que está sendo deslocado do *grid*, ressaltando que o sensor pode ser tanto uma fonte como um receptor. Após isso, calcula-se a probabilidade

de detecção de cobertura de cada quadrado sem a presença do sensor removido em  $j$ , sendo  $j \in G$ . por meio da Equação (6.8).

$$ProbNovo_k = Prob_k - ProbSenRemov_{j,k} \quad \forall j, k \in G \quad (6.8)$$

A  $ProbSenRemov_{j,k}$  representa a probabilidade de detecção que um sensor localizado  $j$  resulta em um quadrado  $k$ . Essa probabilidade pode ser calculada segundo a Equação (2.16).  $Prob_k$  e  $ProbNovo_k$  representam a probabilidade de detecção de um alvo em um quadrado  $k$  sendo  $k \in G$ .

Após obter o valor de  $ProbNovo_k$ , o sensor removido é posicionado em um novo quadrado  $i$ , sendo  $i \in G$ , e o novo local de instalação é definido segundo o critério do movimento selecionado. Uma nova probabilidade de cobertura é calculada,  $ProbFinal_k$ , somando a probabilidade de cobertura do sensor instalado influenciar em cada quadrado do *grid*,  $ProbSenInst_{i,k}$ . A fórmula da probabilidade final é apresentada na Equação (6.9).

$$ProbFinal_k = ProbNovo_k + ProbSenInst_{i,k} \quad \forall i, k \in G \quad (6.9)$$

Por fim, verifica-se qual quadrado do *grid* atendeu a probabilidade mínima de detecção pré-definidos para cada quadrado. Então, é realizado o somatório dos pesos de cobertura dos quadrados cobertos.

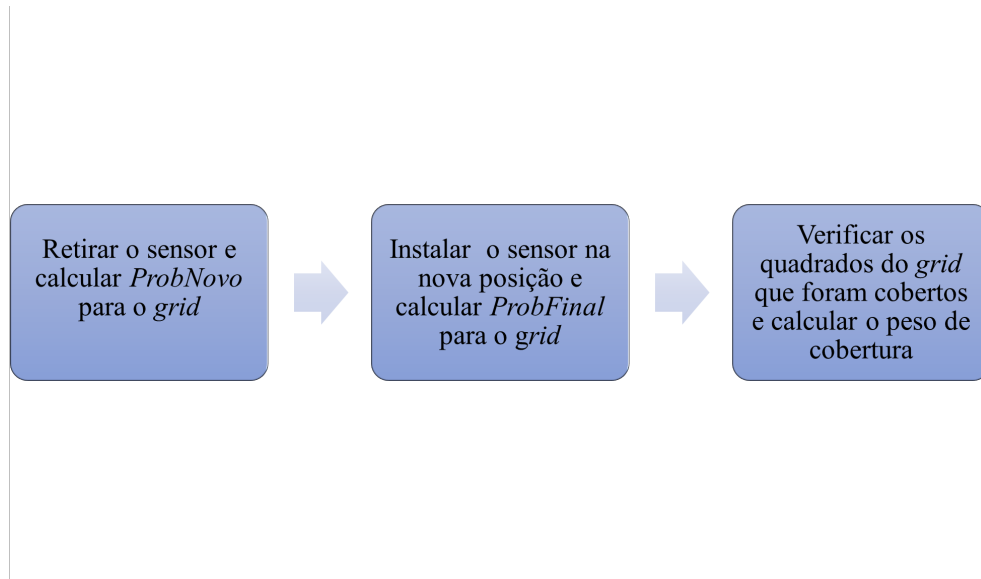


Figura 6.2: Etapas do Processo Realizado pelos Movimento da Busca Local

### 6.5.1 Processamento Paralelo

Tanto o processo para calcular a  $ProbFinal_k$  quanto a  $ProbNovo_k$  são processos demorados, pois necessitam ser realizados para cada quadrado do *grid* e esses processos são sequenciais, iniciando com o primeiro quadrado do *grid* e finalizando com o último quadrado. O processo para calcular  $ProbNovo_k$  para todos os quadrados é exemplificado na Figura 6.3. Conforme os mapas das regiões sejam de melhor resolução, o *grid* ficará maior e conseqüentemente o tempo para calcular as probabilidades de detecção de todos os quadrados também aumentará.

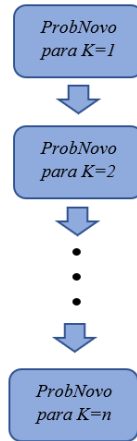


Figura 6.3: Processo Sequencial

A estratégia para obter a cobertura final de um *grid* de forma mais rápida e eficiente é paralelizar os processos para calcular a probabilidade de detecção de cada quadrado. Segundo NAVAUX *et al.* (2011), o processamento paralelo vem ganhando relevância nos últimos anos, pois tem como finalidade obter melhor desempenho computacional, reduzir o número de falhas, utilizando melhor os recursos disponíveis. Esse processo consiste em solucionar um problema computacional por meio da contribuição de várias unidades ativas. Para ROOSTA (2012) há dois tipos de arquiteturas paralelas: o primeiro é o SIMD (do inglês *Single Instruction Stream, Multiple Data Stream*), são computadores que têm uma unidade de controle e gerenciam apenas uma instrução por vez, que é executada pelos elementos de processos. São conhecidos como computadores vetoriais; O segundo é o MIMD (do inglês *Multiple Instructions Stream, Multiple Data Stream*), são computadores conhecidos como multiprocessadores. Esses podem executar diferentes tarefas em diferentes processadores, são mais complexos e gerenciam melhor a memória computacional.

No estudo foi utilizado um computador MIMD. O processo para calcular a  $ProbFinal_k$  e a  $ProbNovo_k$  para cada quadrado foi realizado em paralelo. O principal objetivo foi diminuir o tempo computacional para executar cada movimento e obter a nova cobertura ocasionada por esse movimento. Na Figura 6.4 é apresentado o processo de paralelização para calcular  $ProbNovo_k$ . Nesse exemplo foram utilizados quatro processadores/núcleos.

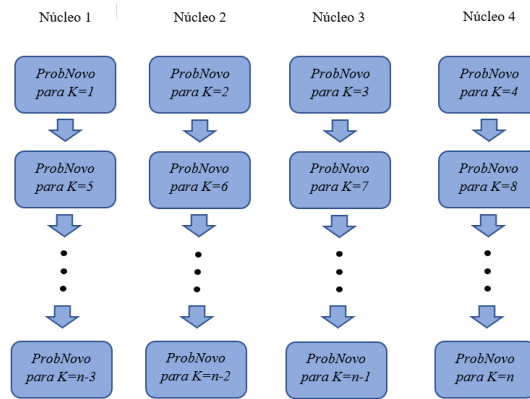


Figura 6.4: Processo Paralelo

Na Figura 6.5 é apresentada a diferença de tempo médio (em segundos) para execução de um movimento utilizando processo sequencial e paralelo. Nesse exemplo foram utilizado oito núcleos e aplicado á Área 2 para uma escala de 1:300 m.

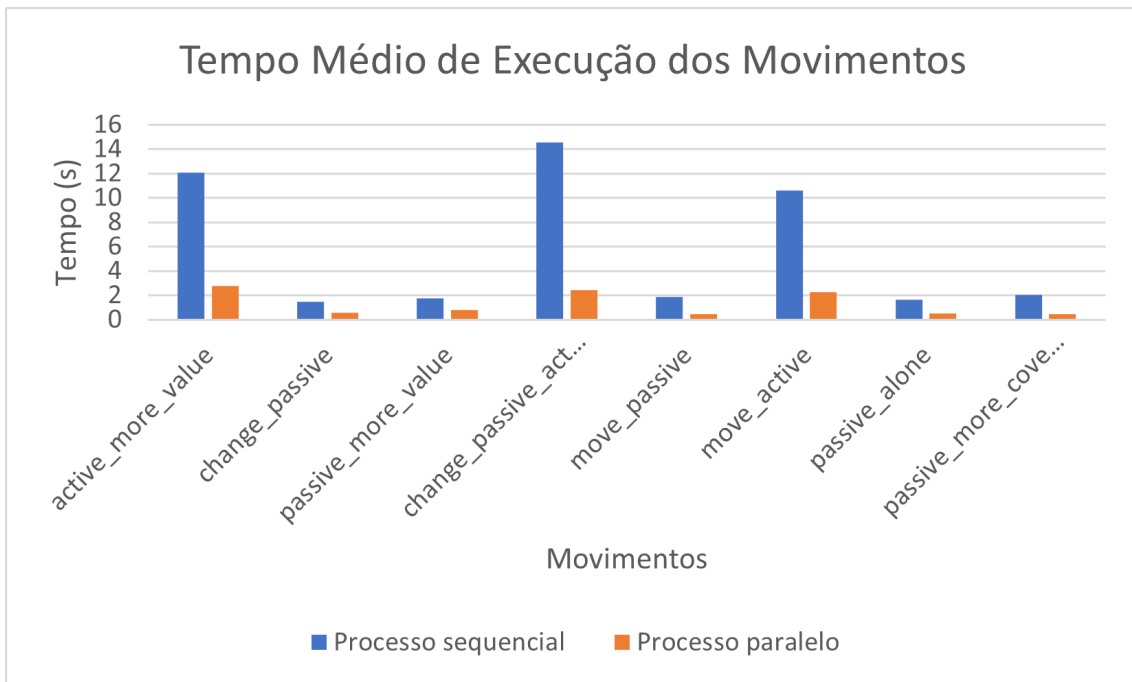


Figura 6.5: Diferença de Tempo entre Processo Sequencial e Processo Paralelo dos Movimentos

# Capítulo 7

## Resultados e Discussões

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos nos experimentos computacionais e as análises realizadas. Na primeira parte, apresentada na Seção 7.1, é realizada a comparação entre os modelos de cobertura acústica, que tem como finalidade definir qual modelo obtém a melhor cobertura para as regiões propostas. Na Seção 7.2 são demonstrados os resultados da Relaxação Lagrangiana e do Lagrangeano Sharp para o Modelo de Cobertura Parcial Probabilístico. A Seção 7.3 apresenta as respostas oriundas da Heurística Gulosa Randômica e analisa como o resultado dessa heurística se comporta como ponto inicial para o Modelo de Cobertura Parcial de Detecção Probabilístico. A seção 7.4 aponta o desempenho da Heurística de Trocas e do *Simulated Annealing*. Por fim, na Seção 7.5 é realizada uma análise comparativa entre os métodos aplicados nesse estudo.

Os experimentos nas seções 7.1, 7.2 e 7.3 foram realizados em um notebook com 16,00 GB de memória RAM, processador Intel® Core™ i7 de 2.30 GHz e sistema operacional Windows 11. Quando foi necessária a resolução de um modelo matemático, foi implementado o otimizador (GUROBI OPTIMIZATION, LLC, 2022). Já na Seção 7.4, o experimento foi realizado por meio de um notebook com 15,00 GB de memória RAM, processador Intel® Core™ i7 de 2.60 GHz e sistema operacional Linux. Esse computador foi escolhido para implementar a Heurística de Troca e o *Simulated Annealing*, pois é um computador com maior quantidade de núcleos (processadores), contendo doze. Desta forma, a implementação do processamento paralelo desenvolvido neste trabalho foi facilitada, não sobrecarregando o desempenho do computador.

### 7.1 Comparação Entre Modelos

Os parâmetros adotados nessa seção são os mesmos adotados para obter todos os resultados apresentados neste capítulo. Seguem os parâmetros:

- O custo da fonte é cinco vezes maior que o custo do receptor, sendo o  $C^s$  igual a 5 e o  $C^r$  igual a 1;
- Utilizou-se três valores de  $RoD$ : 700 m, 800 m e 900 m, os três com probabilidade de detecção de 50%. Os valores foram escolhidos apenas para analisar a relação do comprimento  $RoD$  com os modelos propostos, pois o alcance do dia depende do ambiente, do sensor utilizado e do tipo de alvo a ser monitorado;



- Para o parâmetro  $b$  da Função Fermi adotou-se o valor de 0,5, conforme proposto por OZOLS e FEWELL (2011);
- A probabilidade máxima de detecção da região ( $Prob_{max}$ ) é de 95%;
- Nesse trabalho, foi desconsiderado o efeito da zona cega;
- Na tabela 7.1 são apresentados os pesos e a probabilidade mínima de detecção por sub-região.

Tabela 7.1: Parâmetros por Sub-região

Sub-regiões	Peso das áreas	Probabilidade mínima de detecção (%)
Área de prioridade alta	81	80
Área de prioridade média	16	65
Área de prioridade baixa	1	50

Os resultados computacionais, com toda a análise de dados envolvidos (parâmetros, variáveis de decisão, função objetivo e suas restrições), foram realizados utilizando a linguagem de programação Python, através do otimizador (GUROBI OPTIMIZATION, LLC, 2022).

### 7.1.1 Comparação dos Modelos de Cobertura Total

Na Tabela 7.2 é apresentado um resumo das características dos modelos empregados para cada área de interesse.

Tabela 7.2: Resumo Modelos de Cobertura Total

Descrição	Área 1	Área 2
Função Objetivo	1	1
Variáveis de decisão	176	132
Restrições	88	66

Inicialmente, por meio do emprego dos modelos CTCC e CTPRB, calculou-se a quantidade de fontes e receptores para cobrir as regiões e obter o menor custo de cobertura utilizando três valores de  $RoD$ . Os resultados são apresentados na Tabela 7.3 para a primeira área de interesse (Área 1) e na Tabela 7.4 para a segunda área (Área 2). Para realizar a análise das duas regiões, o modelo CTPBR foi empregado em dois momentos: o primeiro, considerando que os quadrados deveriam ter probabilidade mínima de detecção de 50% (CTPRB<sub>Igual</sub>), ou seja, todos os quadrados têm a mesma probabilidade mínima de detecção; na segunda, a probabilidade mínima de detecção varia conforme as sub-regiões (CTPRB<sub>Dif</sub>), como apresentado na Tabela 7.1.

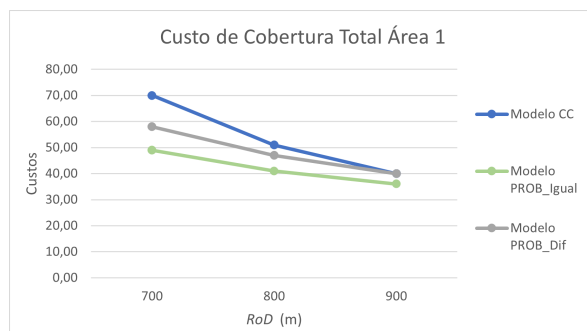
Limitou-se o tempo de execução de 40.000 segundos (aproximadamente 11h ou 667min) para o resolvidor, definido como tempo de execução pelo otimizador. O tempo informado nas tabelas são oriundos do tempo de pré-processamento somado ao tempo de execução do otimizador e, por isso, aparecem tempos maiores que 40.000 segundos.

Tabela 7.3: Resultado dos Modelos CTPRB e CTCC para Área 1

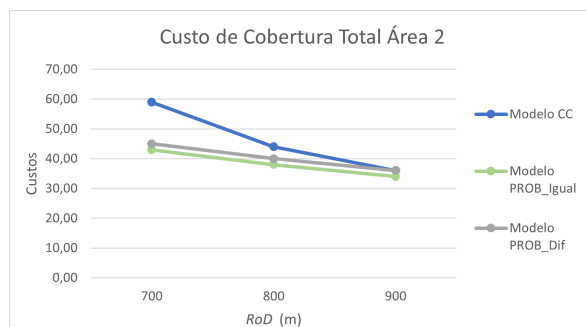
<b>Modelo</b>	<b>RoD (m)</b>	<b>Custo</b>	<b>Fontes</b>	<b>Recep.</b>	<b>Tempo</b>	<b>Gap (%)</b>
CC	700	70,00	8	30	18,80 min	0
	800	51,00	7	16	7,57 h	0
	900	40,00	5	15	3,96 h	0
PROB_Igual	700	49,00	5	24	12,01 h	39
	800	41,00	5	16	12,69 h	37
	900	36,00	4	16	12,41 h	33
PROB_Dif	700	58,00	7	23	11,55 h	45
	800	47,00	6	17	11,97 h	43
	900	40,00	5	15	13,06 h	38

Tabela 7.4: Resultado dos Modelos CTPRB e CTCC para Área 2

<b>Modelo</b>	<b>RoD (m)</b>	<b>Custo</b>	<b>Fontes</b>	<b>Recep.</b>	<b>Tempo</b>	<b>Gap (%)</b>
CC	700	59,00	8	19	9,37 min	0
	800	44,00	6	14	34,46 min	0
	900	36,00	5	11	11,46 min	0
PROB_Igual	700	43,00	5	18	11,44 h	7
	800	38,00	5	13	9,32 h	0
	900	34,00	5	9	4,47 h	0
PROB_Dif	700	45,00	5	20	11,49 h	11
	800	40,00	5	15	11,85 h	13
	900	36,00	5	11	10,81 h	0



(a) Área 1.



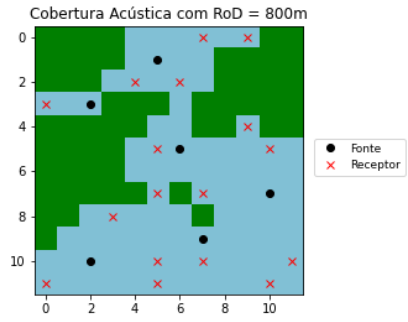
(b) Área 2.

Figura 7.1: Gráficos de Comparação dos Modelos de Cobertura Total para as Diferentes Áreas

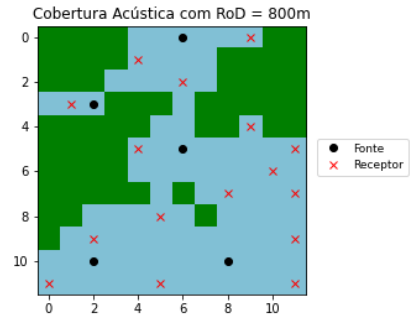
Observando os resultados das Tabelas 7.3, 7.4 e dos Gráficos 7.1(a), 7.1(b), é possível perceber que o modelo CTPRB apresentou um melhor desempenho em comparação ao modelo CTCC, pois obteve menor custo total de cobertura em todas as áreas e para diferentes  $RoD$  e o melhor resultado foi obtido pelo modelo CTPRB<sub>Igual</sub>. Além disso, quanto menor for o  $RoD$ , mais significativa é a diferença entre os modelos. Por outro lado, conforme aumenta o  $RoD$  os modelos convergem para resultados muito próximos. O tempo computacional do CTPRB é muito elevado e em alguns casos estudados não há garantia de que o otimizador conseguiu chegar na solução ótima, pois, para os alcances do dia implementados, as soluções estavam com um *gap* próximo de 40% para a Área 1 e um *gap* próximo de 10% para a Área 2.

Quando se utilizou o modelo CTPRB com diferentes probabilidades mínimas de detecção (CTPRB<sub>SubReg</sub>) obteve-se um resultado melhor que o modelo CTCC. Porque além de se obter com resultados menores custos de cobertura acústica total, obteve-se, também, a garantia de que as áreas mais sensíveis tenham maior probabilidade de detecção, possibilitando que um alvo seja detectado com uma probabilidade de pelo menos 80%, enquanto o modelo CTCC garante uma probabilidade de detecção mínima de 50%. Em apenas um caso esses dois modelos apresentaram o mesmo custo de cobertura, podendo ser visto na área 2 com um alcance do dia de 900m.

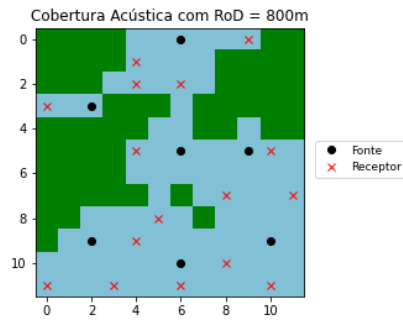
Nas Figuras 7.2 e 7.3 são ilustradas como seriam as coberturas das regiões de interesse utilizando diferentes modelos e empregando-se um  $RoD$  de 800m.



(a) Modelo CTPRB<sub>Dif</sub>.



(b) Modelo CTPRB<sub>Igual</sub>.



(c) Modelo CTCC.

Figura 7.2: Comparação dos Modelos na Área 1 para um  $RoD$  de 800 m.

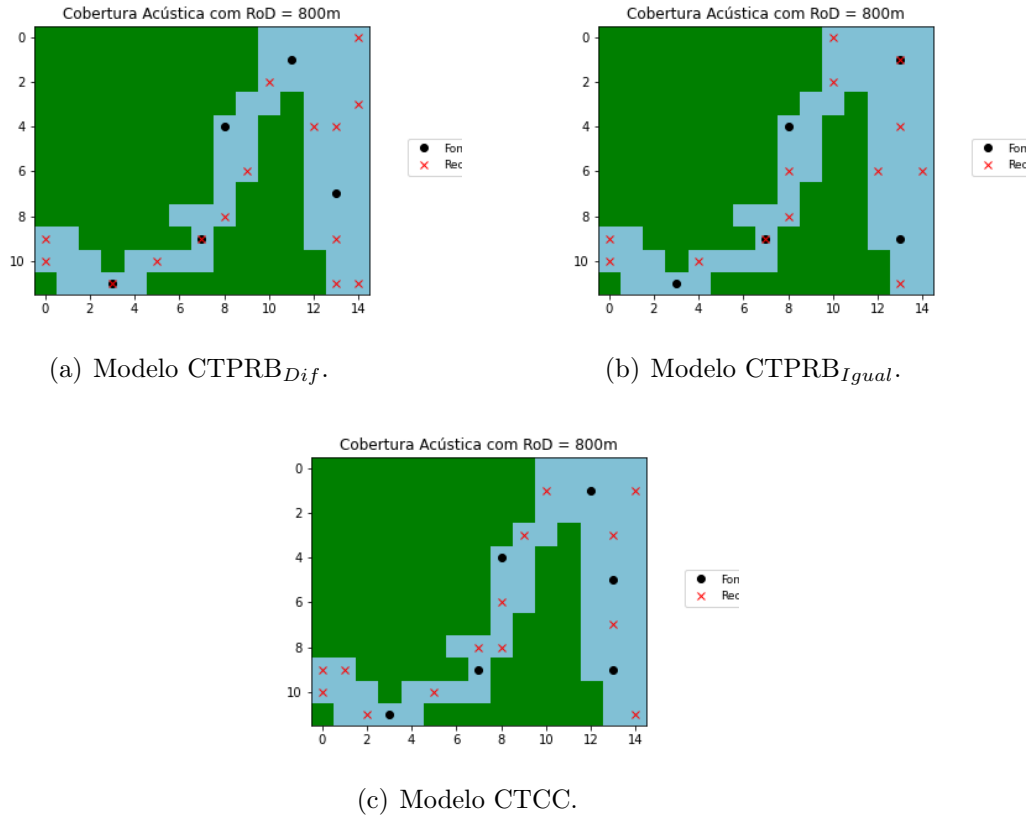


Figura 7.3: Comparação dos modelos na Área 2 para um  $RoD$  de 800 m.

## 7.1.2 Comparação dos Modelos de Cobertura Parcial

Considerando que os gastos para cobrir 100% as regiões estudadas sejam extremamente elevados, neste estudo foi proposto um limite orçamentário para se analisar a cobertura parcial dessas áreas. Para poder comparar o desempenho dos modelos de cobertura parcial (CPCC e CPPRB) foi necessário definir limites orçamentários iguais para os dois modelos. Desta forma, foi definido um limite orçamentário de 20%, 30% e 40% do custo total de cobertura do modelo CTCC para cada área estudada, pois esse modelo apresentou o maior orçamento para os diferentes alcances do dia. A implementação do Modelo CPPRB também foi dividida em duas análises: a primeira utilizando probabilidade mínima de detecção de 50% para a área estudada e a segunda utilizando diferentes probabilidades de detecção para as sub-áreas. É importante ressaltar que os modelos de cobertura parcial têm como finalidade maximizar o peso de cobertura, ou seja, quando maior for o valor obtido pelos modelos mais áreas de prioridade alta e média foram cobertas.

Na Tabela 7.5 é apresentado um resumo das características dos modelos de cobertura parcial empregados para cada Área.

Tabela 7.5: Resumo Modelos de Cobertura Parcial

Descrição	Área 1	Área 2
Função Objetivo	1	1
Variáveis de decisão	264	198
Restrições	89	67

Os resultados para as duas áreas são apresentados nas Tabelas 7.6 e 7.7. Nas tabelas, onde aparece "Cob. Reg. 1", "Cob. Reg. 2" e "Cob. Reg. 3" tem-se a representação da a porcentagem que cada modelo conseguiu cobrir de cada sub-região, sendo a região 1 de maior prioridade de cobertura, a região 2 de prioridade de cobertura média e a região 3 de prioridade de cobertura baixa. Caso o valor seja igual a 1, o modelo cobriu 100% da região. Além do mais, o item "Obj." define o somatório dos pesos dos quadrados que foram cobertos, quanto maior melhor, pois foram cobertas mais áreas e de maior prioridade. Também se limitou o tempo de execução pelo resolvedor em 40000 segundos.



Figura 7.4: Gráficos de Comparação dos Modelos de Cobertura Parcial

Tabela 7.6: Resultados Comparação dos Modelos Parciais para a Área 1

Modelos	RoD	Org.	Cob Reg. 1	Cob. Reg. 2	Cob. Reg. 3	Fontes	Recep.	Obj	Tempo	Gap (%)
700	14,00	0,59	0,00	0,00	0,00	1	9	1.377,00	2,48 min	0
	21,00	0,79	0,05	0,00	0,00	2	11	1.895,00	11,38 min	0
	28,00	0,90	0,23	0,00	0,00	3	13	2.266,00	47,27 min	0
800	10,20	0,59	0,07	0,00	0,00	1	5	1.425,00	1,2 min	0
	15,30	0,79	0,14	0,00	0,00	2	5	1.959,00	6,31 min	0
	20,40	0,90	0,30	0,00	0,00	2	10	2.314,00	24,62 min	0
900	8,00	0,55	0,19	0,00	0,00	1	3	1.424,00	1,37 min	0
	12,00	0,69	0,19	0,00	0,00	1	7	1.748,00	29,68 min	0
	16,00	0,90	0,42	0,00	0,00	2	6	2.394,00	1,80 h	0
700	14,00	0,69	0,09	0,00	0,00	1	9	1.684,00	1,57 h	0
	21,00	0,90	0,35	0,00	0,00	2	11	2.346,00	11,35 h	24
	28,00	0,90	0,74	0,00	0,00	3	13	2.618,00	11,34 h	17
PROB_Igual	10,20	0,62	0,05	0,00	0,00	1	5	1.490,00	16,78 min	0
	15,30	0,83	0,14	0,00	0,00	2	5	2.040,00	11,38 h	23
	20,40	0,90	0,58	0,00	0,00	2	10	2.506,00	11,70 h	22
900	8,00	0,55	0,19	0,00	0,00	1	3	1.424,00	21,24 min	0
	12,00	0,69	0,28	0,00	0,00	1	7	1.812,00	2,77 h	0
	16,00	0,90	0,49	0,00	0,00	2	6	2.442,00	11,34 h	18
700	14,00	0,62	0,05	0,00	0,00	1	9	1.490,00	1,69 h	0
	21,00	0,83	0,14	0,00	0,00	2	11	2.040,00	11,34 h	28
	28,00	0,90	0,47	0,00	0,00	3	13	2.426,00	11,40 h	26
PROB_Dif	10,20	0,55	0,05	0,00	0,00	1	5	1.328,00	18,81 min	0
	15,30	0,69	0,14	0,00	0,00	1	10	1.716,00	2,52 h	0
	20,40	0,90	0,19	0,00	0,00	2	10	2.234,00	11,35 h	20
900	8,00	0,52	0,00	0,00	0,00	1	3	1.215,00	15,57 min	0
	12,00	0,66	0,12	0,00	0,00	1	7	1.619,00	1 h	0
	16,00	0,79	0,21	0,00	0,00	2	6	2.007,00	11,34 h	25

Tabela 7.7: Resultados Comparação dos Modelos Parciais para a Área 2

Modelos	RoD	Orç.	Cob. Reg. 1	Cob. Reg. 2	Cob. Reg. 3	Fontes	Recep.	Obj.	Tempo	Gap (%)
CC	700	11,80	0,71	0,05	0,00	1	3	421,00	29,46 s	0
		17,70	1,00	0,36	0,00	2	7	695,00	1,23 min	0
		23,60	1,00	0,64	0,03	3	8	792,00	11,95 min	0
	800	8,80	0,71	0,05	0,00	1	3	421,00	23,12 s	0
		13,20	1,00	0,23	0,08	2	3	650,00	57,90 s	0
		17,60	1,00	0,55	0,00	2	7	759,00	4,10 min	0
	900	7,20	0,71	0,05	0,00	1	2	421,00	29,06 s	0
		10,80	0,57	0,27	0,03	1	4	421,00	26,21 s	0
		14,40	1,00	0,50	0,05	2	4	745,00	52,15 s	0
PROB_Igual	700	11,80	0,57	0,27	0,03	1	5	421,00	8,31 min	0
		17,70	1,00	0,50	0,05	2	7	745,00	40,66 min	0
		23,60	1,00	0,82	0,08	3	8	858,00	11,26 h	4
	800	8,80	0,71	0,05	0,00	1	3	421,00	6,42 min	0
		13,20	1,00	0,23	0,08	2	3	650,00	24,98 min	0
		17,60	1,00	0,59	0,03	2	7	776,00	27,70 min	0
	900	7,20	0,71	0,05	0,00	1	2	421,00	5,10 min	0
		10,80	0,57	0,27	0,03	1	3	421,00	5,05 min	0
		14,40	1,00	0,50	0,05	2	4	745,00	6,72 min	0
PROB_Dif	700	11,80	0,71	0,05	0,00	1	5	421,00	7,61 min	0
		17,70	1,00	0,36	0,03	2	7	696,00	29,33 min	0
		23,60	1,00	0,68	0,05	3	8	809,00	3,67 h	0,00
	800	8,80	0,71	0,05	0,00	1	3	421,00	8,32 min	0
		13,20	1,00	0,09	0,03	2	3	600,00	9,37 min	0
		17,60	1,00	0,50	0,00	2	7	743,00	2,08 h	0,00
	900	7,20	0,71	0,00	0,00	1	2	405,00	4,71 min	0
		10,80	0,71	0,05	0,00	1	4	421,00	4,77 min	0
		14,40	1,00	0,36	0,08	2	4	698,00	13,11 min	0



Comparando-se os resultados, nota-se que o modelo  $CPPBR_{Igual}$  obteve o melhor desempenho segundo Tabela 7.6, 7.7 e dos Gráficos 7.4, pois obteve o maior peso de cobertura. O modelo garantiu a cobertura de mais quadrados do *grid* para as duas regiões estudadas. Em alguns casos, o modelo CPCC resultou em uma cobertura igual ao  $CPPBR_{Igual}$ , porém nenhuma situação obteve resultado melhor que o modelo  $CPPBR_{Igual}$ . Apesar desse último modelo ter sido o melhor modelo para cobertura parcial, o tempo computacional continua sendo um problema, pois o otimizador não conseguiu alcançar a solução ótima para alguns casos estudados e, desta forma, não foi possível eliminar o *gap*.

Quando se utilizou o *RoD* de 700m o modelo  $CPPBR_{Dif}$  obteve, na maioria dos casos, um melhor resultado que o CPCC. Em apenas uma situação os dois modelos obtiveram o mesmo resultado, conforme é apresentado na Figura 7.4(b). Todavia, para o alcance do dia de 800m e 900m a cobertura não foi tão bem sucedida pelo modelo  $CPPBR_{Dif}$  e o modelo CPCC obteve melhores resultados.

Por fim, ao se comparar o modelo  $PPBR_{Igual}$  e o modelo  $PPBR_{Dif}$ , percebe-se que há uma diferença significativa na cobertura entre os dois, obtendo-se um melhor resultado no  $PPBR_{Igual}$ . Apenas em um caso os dois modelos obtiveram a mesma cobertura (Área 2 para um *RoD* de 700 m), conforme ilustrado Figura 7.4(b). Porém ao utilizar o  $PPBR_{Dif}$ , a chance de detectar um alvo nos quadrados cobertos é muito maior. Então, a escolha em utilizar diferentes probabilidades de detecção nas sub-regiões deve ser baseada no limite orçamentário e na necessidade de melhor precisão em detectar um alvo.

Nas Figuras 7.5 e 7.6 são ilustrados a cobertura acústica para as duas áreas de interesse.

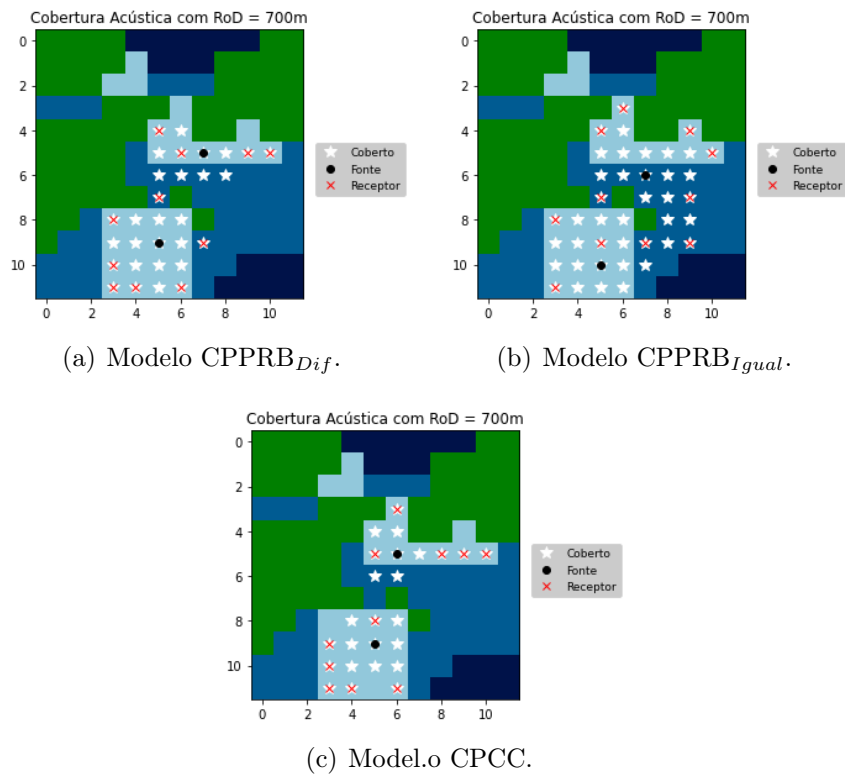


Figura 7.5: Comparação dos Modelos para a Área 1, *RoD* de 700m e 30% do Custo Total.

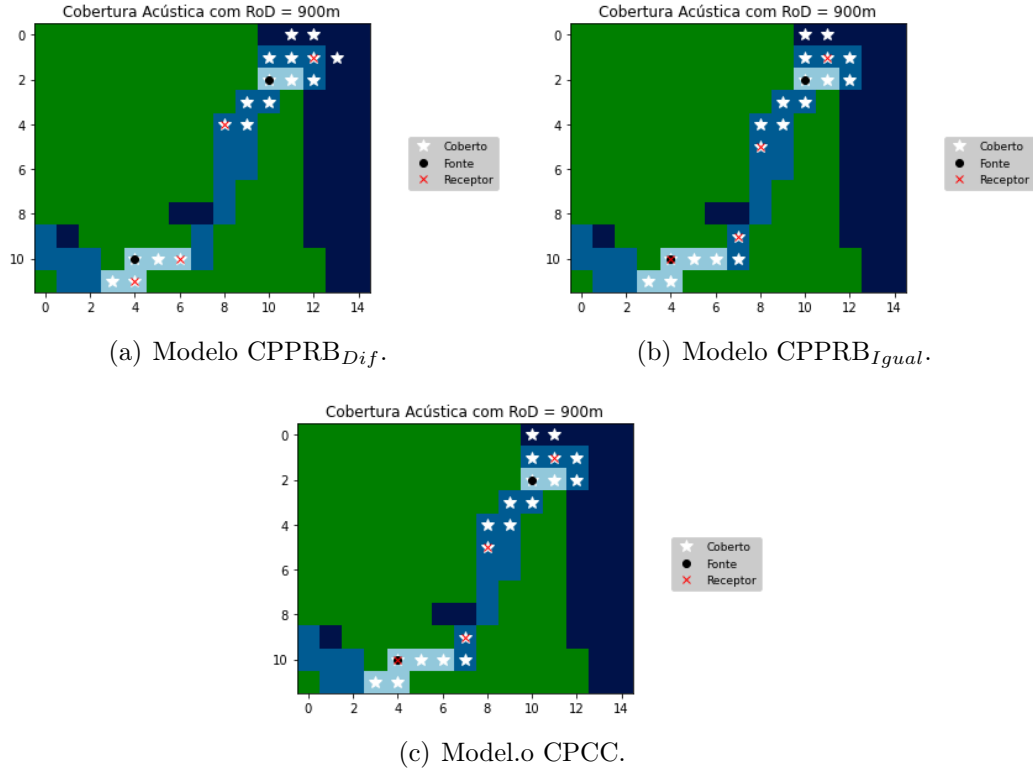


Figura 7.6: Comparação dos modelos para a Área 2, RoD de 900m e 40% do Custo Total.

## 7.2 Melhoria dos resultados do Modelo CPPROB

Conforme apresentado na Seção 7.1, o Modelo de Cobertura Parcial de Detecção Probabilístico (CPPRB) obteve a melhor resposta de cobertura para as duas áreas estudadas. Entretanto, em alguns casos não foi possível garantir a melhor solução, além desse modelo ocasionar um elevado tempo computacional.

Apesar de ter sido definido um tempo máximo de execução do modelo de 40000 segundos de execução, foram feitos testes para a Área 1 com tempo de execução de aproximadamente 3 dias. Entretanto, esse tempo não foi suficiente para o otimizador obter a melhor solução. Desta forma, utilizar apenas o otimizador não garante que o ótimo global será encontrado.

Visto isso, essa seção tem como objetivo resolver os problemas duais para garantir melhores resultados tanto para a cobertura parcial como para os tempos computacionais.

### 7.2.1 Solução do Problema Dual

Para as instâncias em que o Modelo de Cobertura Parcial de Detecção Probabilístico não conseguiu garantir o ótimo local, ou seja, não eliminou o *gap*, foi aplicada a relaxação lagrangiana por meio do Método de Feixes com o objetivo de obter um limite superior melhor para ser fornecido ao resolvidor e auxiliá-lo a resolver o problema (melhoria do limitante dual). Nesse estudo, o Método de Feixes foi implementado através do pacote *pynso*, para uso em Python. A Tabela 7.8 apresenta

os parâmetros utilizados. É importante salientar que o  $x_0$  são as variáveis duais e vão pertencer ao espaço equivalente ao número de restrições relaxadas. Por fim, o elemento *Iter* representa o número máximo de iterações que o pacote pynso pode executar para resolver o problema.

Tabela 7.8: Parâmetros Método de Feixe

$\gamma_0$	$\alpha$	$\varepsilon$	nº feixes	Iter	$x_0$ (Área 1)	$x_0$ (Área 2)
0.01	0.5	$10^{-5}$	5	200	$x_0 \in \mathbf{R}^{89}$ e todos os elementos de $x_0$ são iguais a 1	$x_0 \in \mathbf{R}^{67}$ e todos os elementos de $x_0$ são iguais a 1

Para as duas áreas estudadas foi obtida uma solução  $\bar{x}$  em que todos os elementos do vetor são iguais a zero. O tempo de execução médio para a Área 1 foi de 53 min, com  $\varepsilon = 0,0001$  e utilizou-se as 174 iterações. Já no caso da Área 2, foi realizado em um tempo de 18 min,  $\varepsilon = 0,0005$  e executou 83 iterações. Os resultados obtido pelo Método de Feixes foi equivalente ao utilizado pelo resolvidor GUROBI OPTIMIZATION, LLC (2022). Além do mais, os valores resultantes não são adequados ao problema, pois em todas as instâncias estudadas foram encontrados os mesmo valores de limite superior (3053 para a Área 1 e 956 para a Área 2). Esse limite obtido representava que as regiões estão 100% coberta, porém é inviável para os casos estudados devido às limitações orçamentárias. Desta forma, a relaxação lagrangiana não obteve um resultado que pudesse auxiliar o otimizador a resolver o problema em estudo.

## 7.2.2 Solução da Função Dual com Lagrangeano Sharp

Para poder resolver o problema dual com Lagrangeano Sharp das instâncias em que o otimizador não conseguiu eliminar o *gap*, foi necessário definir os parâmetros de entrada, conforme Tabela 7.9. Também se aplicou o pacote pynso para resolver as duas funções duais (uma utilizando norma L1 e a outra norma infinita)

Tabela 7.9: Parâmetros Método de Feixe Para o Problema Dual com Lagrangeano Sharp

$\gamma_0$	$\alpha$	$\varepsilon$	nº feixes	Iter	$x_0$ (Área 1)	$x_0$ (Área 2)
0.01	0.5	$10^{-5}$	20	100	$x_0 \in \mathbf{R}^{87}$ , todos os elementos de $\lambda$ são iguais a 1 e $r = 200$	$x_0 \in \mathbf{R}^{67}$ , todos os elementos de $\lambda$ são iguais a 1 e $r = 200$

Nas instâncias estudadas, tendo a função dual que engloba a norma de L1 quanto a função que aplica a norma infinita, após 24h de execução do Método de Feixes, o pacote pynso não havia conseguido finalizar uma iteração.

Para provar que a solução da função dual com Lagrangeano Sharp é igual a solução da função primal, foi aplicado o caso do modelo de CPPRO<sub>igual</sub> com um *RoD* igual a 700 m e orçamento de 20%, nesse cenário a solução do primal já havia sido obtida pelo otimizador. A Tabela 7.10 apresenta os resultados.

Tabela 7.10: Área 2 Lagrangeano Sharp

Função	Solução	Tempo	Iterações
Primal	421	8,31 min	-
Dual com $\ \cdot\ _1$	421	52 min	1
Dual com $\ \cdot\ _\infty$	-	-	-

O pacote pynso não conseguiu achar um resultado depois de 48h para resolver a função dual com  $\|\cdot\|_\infty$ . Entretanto, para o caso da função dual com  $\|\cdot\|_1$ , o pynso encontrou a mesma solução do primal, porém a solução da função primal é obtida em um tempo computacional muito menor.

### 7.3 Heurística Gulosa Randômica

Ao implementar o Modelo de Cobertura Parcial de Detecção Probabilístico não foi possível obter soluções ótimas e, muitas vezes, o resolvedor apresentou um tempo de execução extremamente elevado. Desta forma, foi desenvolvido nesse trabalho uma Heurística Gulosa Randômica para buscar soluções mais rápidas e obter resultados para as escalas de melhores resoluções, ou seja, escalas de 1:300 m, 1:200 m e 1:100 m.

Para analisar o desempenho dessa heurística e das heurísticas apresentadas na seção 7.4, foi escolhido o cenário em que se aplicou um  $RoD$  de 700 m no Modelo de Cobertura Parcial de Detecção Probabilístico e que todos os quadrados apresentavam a mesma probabilidade mínima de detecção ( $CPPROB_{I_{qual}}$ ), além de um limite orçamentário equivalente a 40% da cobertura total. Esse cenário foi escolhido porque nas duas regiões de interesse o otimizador Gurobi não eliminou o *gap*.

Em um primeiro instante, o desempenho da HGR foi comparado aos resultados obtidos pelo otimizador. Para essa comparação, verificou-se o resultado atingido pelo otimizador para as escalas 1:300 m, 1:200 m e 1:100 m, que até então não haviam sido executadas. Para essas escalas utilizou-se o mesmo limite orçamentário empregado na escala 1:500 m. Foi delimitado um tempo de 40000 segundos para execução do otimizador e um tempo total de 86400 segundos (24 horas) para o otimizador realizar o pré-processamento mais a execução.

Na HGR um dos principais parâmetros de entrada é o  $N$ , pois esse parâmetro tem uma relação direta com o número de receptores e fontes empregados no problema. O  $N$  representa a quantidade de tentativas de incluir um receptor vinculado a uma fonte. Para saber qual o melhor valor de  $N$  que deve ser utilizado, foram feitas duas análises: a primeira consiste em verificar qual o valor de  $N$  que resulta em um melhor desempenho da HGR; já na segunda análise, verificou-se qual valor de  $N$  utilizado na HGR apresentava um melhor desempenho ao aplicar posteriormente o *Simulated Annealing*. As Figuras 7.7 e 7.8 apresentam os resultados na forma de gráficos. Foram consideradas cinco tentativas para cada valor de  $N$  e então realizada a média dos resultados.

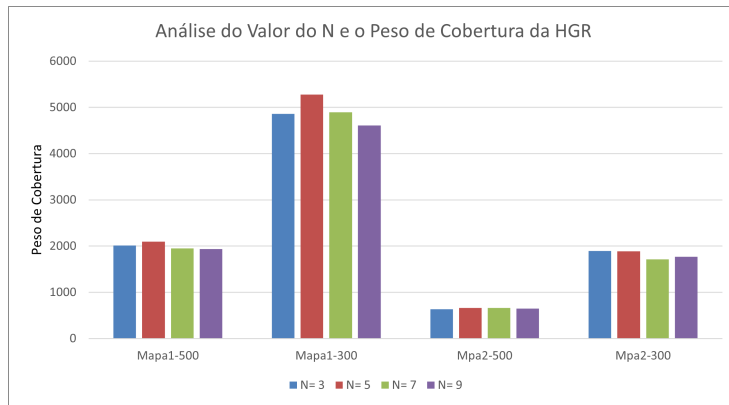


Figura 7.7: Valor de N e o Desempenho da HGR

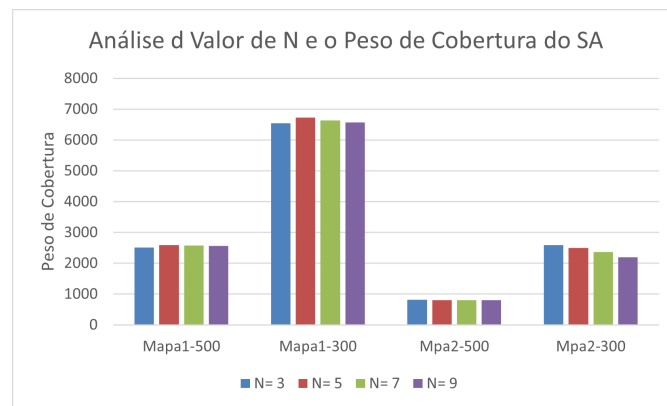


Figura 7.8: Valor de N e o Desempenho do SA

Após verificar o desempenho de cada valor de  $N$ , optou-se por considerar  $N$  igual a cinco, porque na média entre as instâncias foi o que apresentou melhor desempenho.

Na Tabela 7.11 e na Tabela 7.12 é possível verificar os resultados obtidos pela HGR para cada região de interesse. Também é viável comparar com os resultados oriundos do otimizador. Foram realizadas dez tentativas para cada escala.

Tabela 7.11: Resultado HGR para Área 1

Escala (m)	OTIMIZADOR		HEURÍSTICA GULOSA RANDÔMICA				
	Melhor Res.	Tempo	Média Peso	Desv. Peso	Melhor Res.	Média Tempo	Desv. Tempo
1:500	<b>2618</b>	11,34 h	1946,5	334,354	<b>2314</b>	6,06 s	0,935 s
1:300	-	-	4835,8	861,500	5858	20,07 s	4,78 s
1:200	-	-	10338,4	1781,2401	13235	59,72 s	10,52 s
1:100	-	-	37376,4	6038,153	45874	6,32 min	1,1 min

Tabela 7.12: Resultado HGR para Área 2

Escala (m)	OTIMIZADOR		HEURÍSTICA GULOSA RANDÔMICA				
	Melhor Res.	Tempo	Média Peso	Desv. Peso	Melhor Res.	Média Tempo	Desv. Tempo
1:500	<b>858</b>	11,26 h	676,8	49,687	<b>733</b>	3,99 s	0,852 s
1:300	<b>2.674</b>	14,46 h	1779,1	188,710	<b>1982</b>	15,29 s	2,935 s
1:200	-	-	3845,7	466,054	4559	49,26 s	8,656 s
1:100	-	-	19089,8	4762,732	23062	8,85 min	3 min

Nas Figuras 7.9 e 7.10 são demonstradas as diferenças de coberturas ao utilizar o otimizador e a HGR.

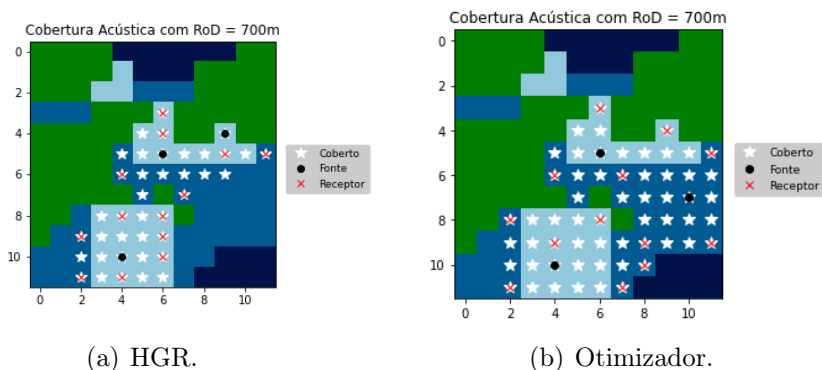


Figura 7.9: Comparação da HGR e o Otimizado para a Área 1, Escala de 1:500 m

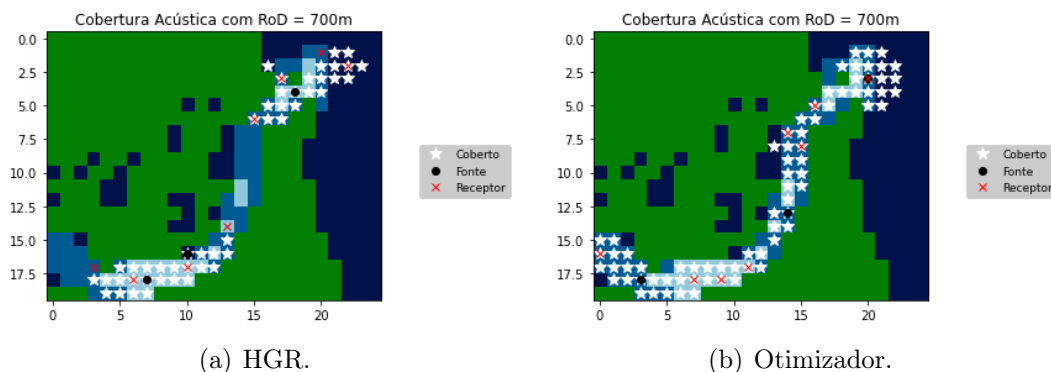


Figura 7.10: Comparação da HGR e o Otimizado para a Área 2, Escala de 1:300 m

A partir da observação dos resultados apresentados nas Tabelas 7.11 e 7.12, é possível perceber que as coberturas acústicas oriundas da HGR apresentaram um resultado pior quando comparado com os resultados do resolvidor Gurobi, pois a HGR obteve um peso menor de cobertura. Os melhores resultados de cada método estão em negrito.

A heurística obteve resultados razoáveis, visto que para a Área 1 (escala 1:500 m) o melhor resultado da HGR foi 11% pior que o otimizador. Já para a Área 2, a heurística foi 14% pior para a escala de 1:500 m e 25% para a escala de 1:300 em relação ao otimizador Gurobi. Entretanto os tempos computacionais de execução

HGR foram muito menores, sendo executados em segundos. Além de conseguir obter resultados para escalas de melhores resoluções.

Em uma segunda análise, foi utilizado os resultados da HGR como ponto inicial do otimizador. Nesse caso, considerou-se um tempo de resolução do Gurobi de 10000 segundos (aproximadamente 3 horas), visto que o otimizador iniciava com uma solução boa. Os resultados para as duas áreas podem ser vistos nas Tabelas 7.13 e 7.14. A média do tempo total foi alta, pois inclui o tempo de pré-processamento somado ao de execução.

Tabela 7.13: Resultado HGR + Otimizador para Área 1

<b>Escala (m)</b>	<b>Média Peso</b>	<b>Desv. Peso</b>	<b>Melhor Res.</b>	<b>Média Tempo</b>	<b>Desv. Tempo</b>	<b>gap (%)</b>
1:500	2640,6	45,333	2688	6,24 h	3,84 h	13,5

Tabela 7.14: Resultado HGR + Otimizador para Área 2

<b>Escala (m)</b>	<b>Média Peso</b>	<b>Desv. Peso</b>	<b>Melhor Res.</b>	<b>Média Tempo</b>	<b>Desv. Tempo</b>	<b>gap (%)</b>
1:500	858	0	858	2,83 h	17,63 min	0
1:300	2648,7	26,683	2671	7,89 h	1,62 h	9,24

Após analisar as Tabelas, percebe-se que, ao utilizar a escala de 1:500 m, a HGR somado ao otimizador obtiveram resultados muito bons para as duas áreas. Na Área 2, o otimizador conseguiu eliminar o *gap*, garantindo que o ótimo global fosse encontrado para essa região. Já na Área 1, o ótimo global não foi garantido. Entretanto uma melhor solução foi apresentada e um menor *gap* foi obtido pelo otimizador. Por outro lado, ao implementar a HGR e o otimizado para a escala 1:300 m na Área 2, não foi possível obter um resultado melhor que o resolvidor, pois a melhor solução e o menor *gap* foram piores do que apresentados na Tabela 7.12.

## 7.4 Heurística de Troca e *Simulated Annealing*

Nesta seção, serão apresentados os resultados obtidos tanto para a Heurística de Troca (HT) quanto para o *Simulated Annealing* (SA). As heurísticas foram implementadas para as duas áreas, aplicadas às quatro escalas (1:500 m, 1:300 m, 1:200 m e 1:100 m). Além disso, para realizar a busca local paralelizada, foi considerada a utilização de oito núcleos. A quantidade de núcleos foi determinada com base na relação de números de núcleos e o menor tempo computacional de execução da maior instância estudada ao implementar a HT e o SA. Por fim, o parâmetro *passo* aplicado às heurísticas é igual a 2, ou seja, alguns movimentos da busca local podem se deslocar de um a dois quadrados tanto na diagonal, quanto na horizontal ou na vertical.

Foram utilizados os resultados obtidos da Heurística Gulosa Randômica como ponto inicial para a Heurística de Troca e o *Simulated Annealing*. Além disso, os algoritmos foram executados três vezes para cada solução inicial. Desta forma, para cada escala foram obtidos 30 resultados.

Nos gráficos das Figuras 7.11(a) e 7.11(b) são apresentadas as diferenças dos algoritmos em relação ao critério de aceitação de uma nova solução. Enquanto a HT aceita apenas soluções que melhorem o resultado final do algoritmo, o SA aceita soluções ruins, principalmente nas primeiras iterações do algoritmo. Nesse exemplo, utilizou-se o mapa da Área 1 para uma escala de 1:300 m. As duas heurísticas iniciaram com a mesma solução.

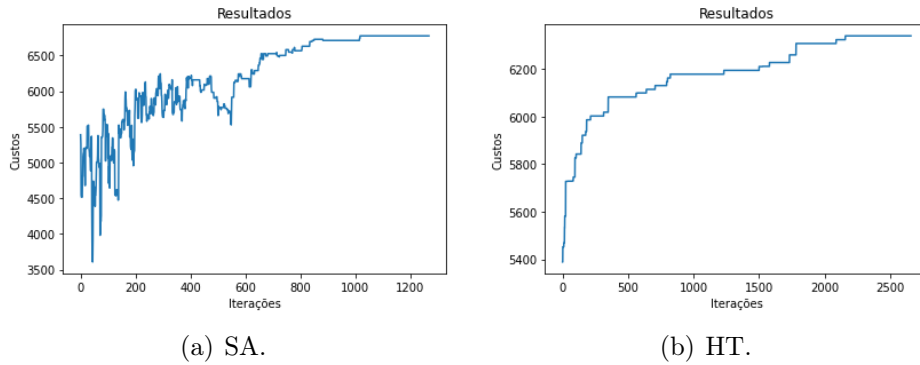


Figura 7.11: Comparação do Critério para aceitar uma Solução

Na Tabela 7.15 são ilustrados os resultados da HT para a Área 1. Já na Tabela 7.16 estão os resultados da Heurística de Troca para a Área 2.

Tabela 7.15: Heurística de Troca Área 1

Escala (m)	Média Peso	Desv. Peso	Melhor Res.	Média Tempo	Std tempo)
1:500	2527,267	94,231	2672	6,57 min	2,99 min
1:300	6552,833	175,504	6892	39,77 min	14,29 min
1:200	14791,67	458,171	15619	2,52 h	58,14 min
1:100	58520,6	1841,984	61219	9,75 h	1,72 h

Tabela 7.16: Heurística de Troca Área 2

Escala (m)	Média Peso	Desv. Peso	Melhor Res.	Média Tempo	Std tempo
1:500	810,233	25,731	842	2,89 min	56,351 s
1:300	2354,033	228,680	2637	9,98 min	4,73 min
1:200	5049,6	91,662	5283	41,10 min	14,85 min
1:100	24810,57	260,498	25409	5,57 h	2,05h

O número máximo de iterações em cada temperatura ( $iter_{max}$ ) e a taxa de resfriamento ( $\alpha$ ) do algoritmo do SA foram escolhidas após algumas simulações com os mapas das áreas estudadas. Então, definiu-se os valores dos parâmetros que obtiveram os melhores desempenhos após as simulações. O  $iter_{max}$  é igual a oito e o  $\alpha$  igual a 0,96.

Na Tabela 7.17 e na 7.18 são apresentados os resultados obtidos ao implementar o SA para a Área 1 e Área 2 respectivamente.

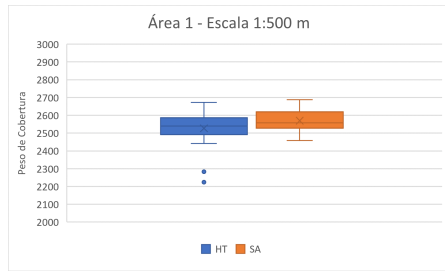


Tabela 7.17: *Simulated Annealing* Área 1

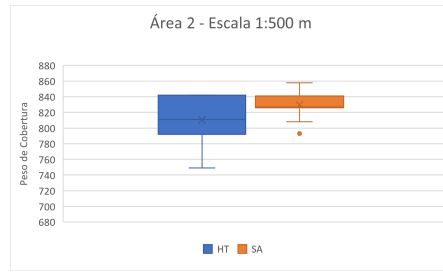
<b>Escala (m)</b>	<b>Média Peso</b>	<b>Desv. Peso</b>	<b>Melhor Res.</b>	<b>Média Tempo</b>	<b>Std tempo</b>
1:500	2570	55,077	2688	7,35 min	1,63 min
1:300	6662	140,126	7005	35,95 min	10,42 min
1:200	15071,53	376,915	15603	2,32 h	27,96 min
1:100	58504,5	1443,139	60679	11,22 h	3,28 h

Tabela 7.18: *Simulated Annealing* Área 2

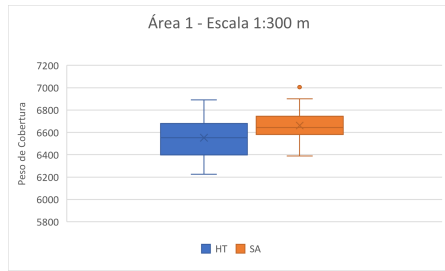
<b>Escala (m)</b>	<b>Média Peso</b>	<b>Desv. Peso</b>	<b>Melhor Res.</b>	<b>Média Tempo</b>	<b>Std tempo</b>
1:500	829,933	15,283	858	2,63 min	28,100 s
1:300	2397,767	198,390	2653	14,30 min	4,07 min
1:200	5060	105,107	5316	46,52 min	9,31 min
1:100	24949,067	242,624	25641	6,62 h	1,66 h



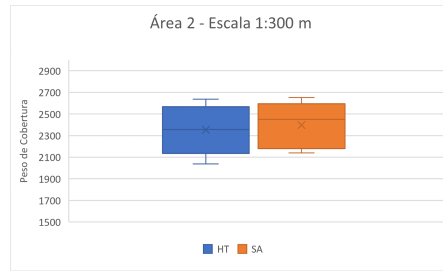
(a) Área 1 - Escala 1:500 m.



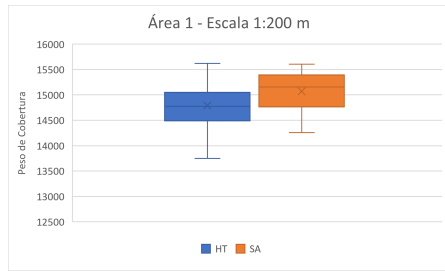
(b) Área 2 - Escala 1:500 m.



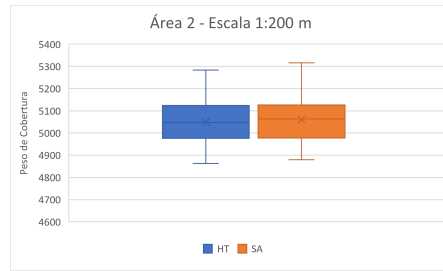
(c) Área 1 - Escala 1:300 m.



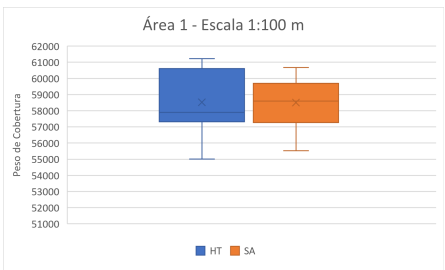
(d) Área 2 - Escala 1:300 m.



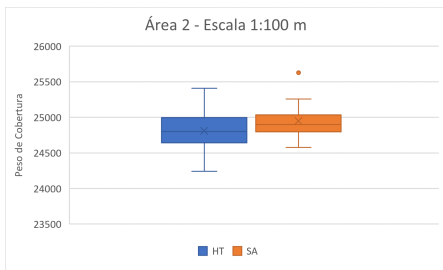
(e) Área 1 - Escala 1:200 m.



(f) Área 2 - Escala 1:300 m.



(g) Área 1 - Escala 1:100 ml.



(h) Área 2 - Escala 1:100 m.

Figura 7.12: Comparação, em forma de *Box-Plot*, entre HT e SA para o Peso de Cobertura

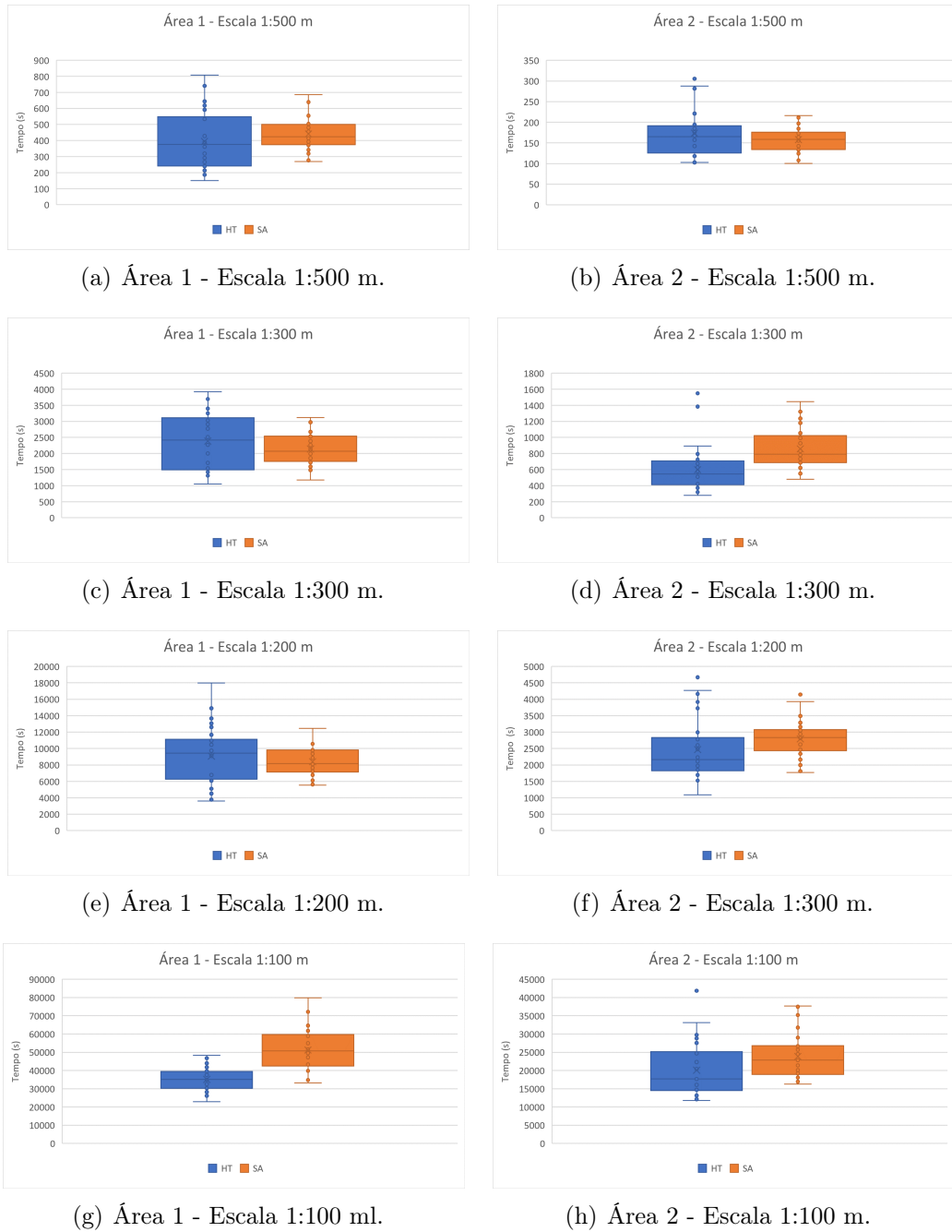


Figura 7.13: Comparação de *Box-Plot* entre HT e SA para o Tempo de Execução

Quando analisados os resultados apresentados nas Tabelas 7.15, 7.16, 7.17 e 7.18 e os gráficos *Box-Plot* da Figura 7.12 é possível perceber que o *Simulated Annealing* obteve melhor média, melhor mediana e menor desvio padrão em quase todos os cenários estudados, sendo uma heurística mais estável e resultando em uma melhor cobertura acústica, visto que o objetivo é maximizar os pesos de cobertura. O SA consegue obter soluções melhores, pois busca escapar de ótimos locais de baixa qualidade, pois aceita soluções de piora. Outro fator que contribui para a HT ter um desempenho pior que o SA, decorre devido à Heurística de Troca depender da solução inicial. Caso o algoritmo inicie com uma solução boa, há maior a probabilidade de a solução final ser boa também.

Na instância em que foi colocado um limite de iterações ( para instância com

mais de 2.000 quadrados de água), o SA não conseguiu convergir para um bom resultado, visto que o algoritmo foi interrompido antes de chegar ao estado de equilíbrio. Apesar disso, a média obtida pelos dois algoritmos foram muito próximas e o SA apresentou um melhor valor de mediana, conforme ilustrado no Gráfico 7.12(g). Por fim, nessa situação o tempo computacional do SA foi muito maior que o obtido pela HT, pois o processo para analisar se um novo valor será aceito ou não a cada iteração é mais demorado no *Simulated Annealing* do que a Heurística de Troca e, como os dois algoritmos apresentam o mesmo número de iterações, a HT acaba sendo mais rápida.

A Heurística de Troca obteve, na maioria dos casos, um melhor tempo computacional ao ser aplicado para a Área 2. Isso ocorre, porque a região de água dessa área é mais estreita e o algoritmo alcança um estado de equilíbrio mais rapidamente, ou seja não há mais melhorias. Todavia, os tempos computacionais para execução das duas heurísticas são parecidos, com exceção da área 1 para a escala de 1:100 m. Os Gráficos *Box-Plot* dos tempos são apresentada na Figura 7.13 e onde pode ser observado que, na maioria dos casos, a HT obtém uma mediana melhor para o tempo de execução.

Após o experimento computacional com Heurística de Troca e com o *Simulated Annealing*, foi verificado que o número de fontes e receptores selecionados pela HGR é um fator de extrema importância para o resultado final da cobertura acústica para as regiões estudadas, porque os algoritmos não alteram a quantidade de fontes e receptores ao longo de suas execuções. Para exemplificar esse problema, utilizou-se para a Área 2 uma escala de 1:200 m. Nesse cenário, as instâncias iniciais que eram compostas por três fontes e oito receptores, apresentaram melhor cobertura acústica em comparação com as instâncias que apresentavam duas fontes e treze receptores. A comparação é ilustrada na Figura 7.14 cujos resultados foram obtidos por meio do SA.

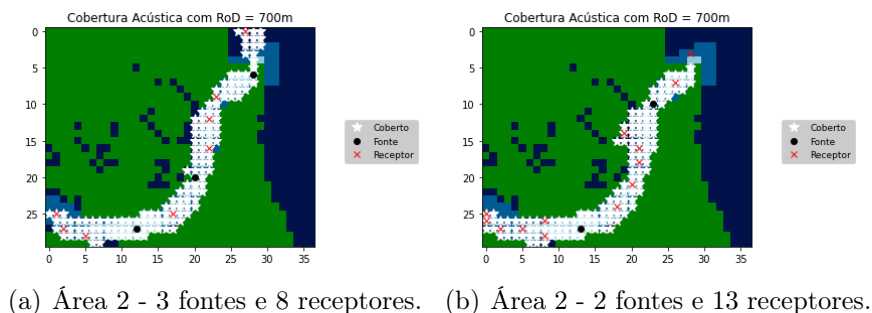


Figura 7.14: Comparação de Cobertura para Diferentes Quantidades de Fontes e Receptores

### 7.4.1 Desempenho dos Movimentos da Busca Local

Nesta seção, serão analisados os movimentos da Busca Local, verificando quais movimentos resultam em um melhor desempenho para o *Simulated Annealing* e a Heurística de troca. Em cada gráfico da Figura 7.15 são ilustradas a quantidade de vezes que um movimento apresentou um resultado melhor, ou seja, uma melhor cobertura até o momento de execução do algoritmo. Foram considerados as 30 instâncias para cada escala.

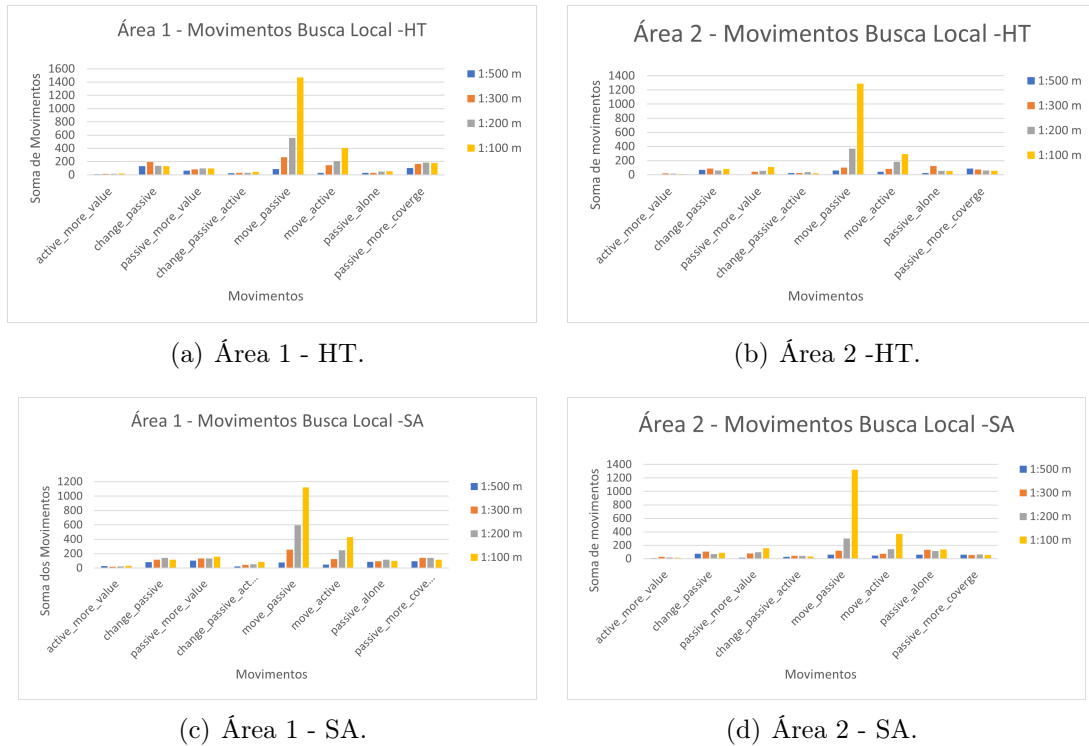
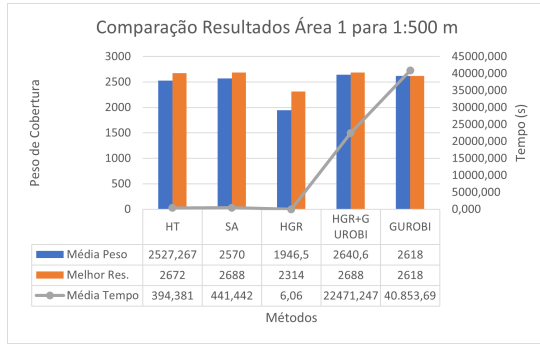


Figura 7.15: Comparação do Desempenho dos Movimentos

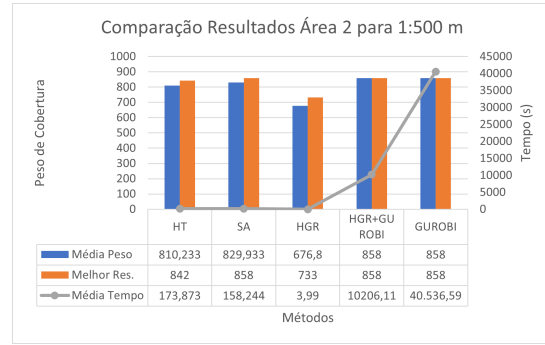
Conforme os gráficos apresentados na Figura 7.15, é possível perceber que o movimento *active\_more\_value* e o movimento *change\_passive\_active* são os que resultam em menor quantidades de ótimos locais, pois são movimentos que alteram a posição da fonte. Quando uma fonte é deslocada para outro local, essa pode estar posicionada em uma região muito longe dos receptores, impossibilitando que o critério de cobertura seja atendido. Outro fator interessante, que também é perceptível nos gráficos, é que os movimentos *move\_passive* e *move\_active* aumentam a quantidade de vezes em que se obtém um melhor resultado a medida que o grid se adensa.

## 7.5 Comparação entre os Métodos

Nesta seção, é realizada uma análise para comparar o desempenho de cada método desenvolvido neste trabalho. Nos gráficos apresentados nas Figuras 7.16(a), 7.16(b), 7.17(a), 7.17(b), 7.18(a), 7.18(b), 7.19(a), 7.19(b) são ilustradas a média dos resultados obtidos, o melhor resultado e a média de tempo de execução para cada método adotado. Nas figuras 7.20 e 7.21 são ilustrados os melhores resultados de cobertura para cada área de interesse. Caso dois métodos apresentem o mesmo resultado, é escolhido aquele com o menor tempo computacional.

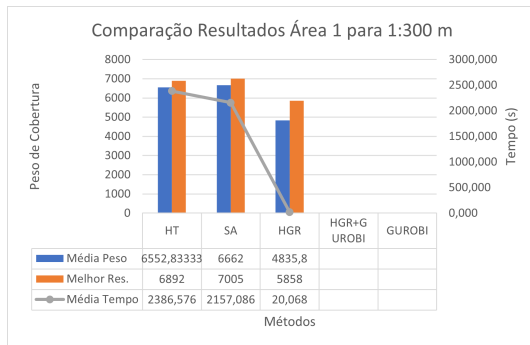


(a) Área 1.

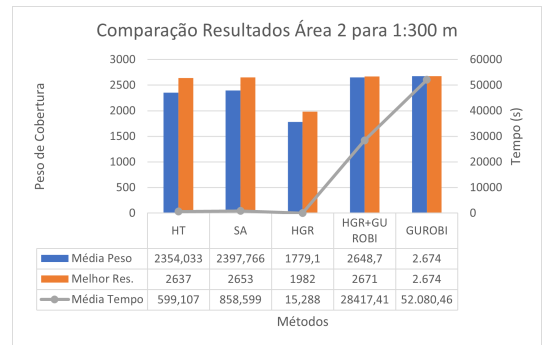


(b) Área 2.

Figura 7.16: Escala 1:500 m

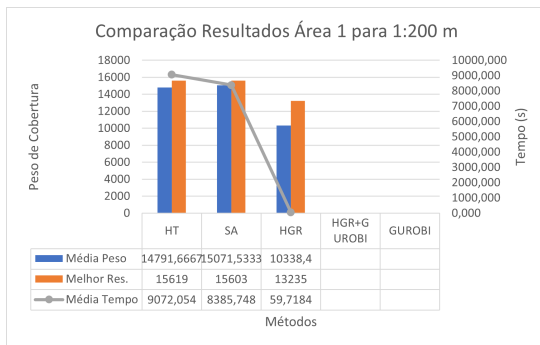


(a) Área 1.

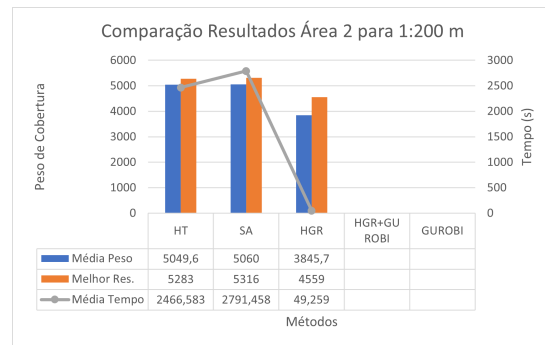


(b) Área 2.

Figura 7.17: Escala 1:300 m

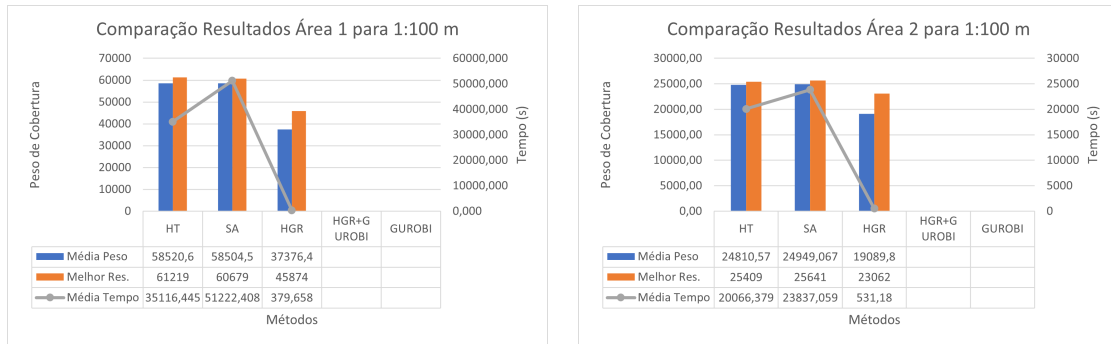


(a) Área 1.



(b) Área 2.

Figura 7.18: Escala 1:200 m



(a) Área 1.

(b) Área 2.

Figura 7.19: Escala 1:100 m

Após analisar os gráficos, é possível perceber que a HGR obtém soluções em um tempo computacional muito pequeno, entretanto com resultados não tão bons. Já as heurísticas (HT e SA) fornecem soluções boas para todas as escalas em um tempo viável, sendo que o *Simulated Annealing* obteve, na maioria dos casos, melhores resultados, pois obteve o maior peso de cobertura. Por fim, o emprego do otimizador, tanto para o Gurobi como a HGR mais o Gurobi, para os mapas com *grids* menos densos, apresentaram uma boa solução média para os resultados observados, entretanto os tempos de execução são extremamente elevados. A impossibilidade de usar *grids* mais densos é outro fator que limita a execução do otimizador.

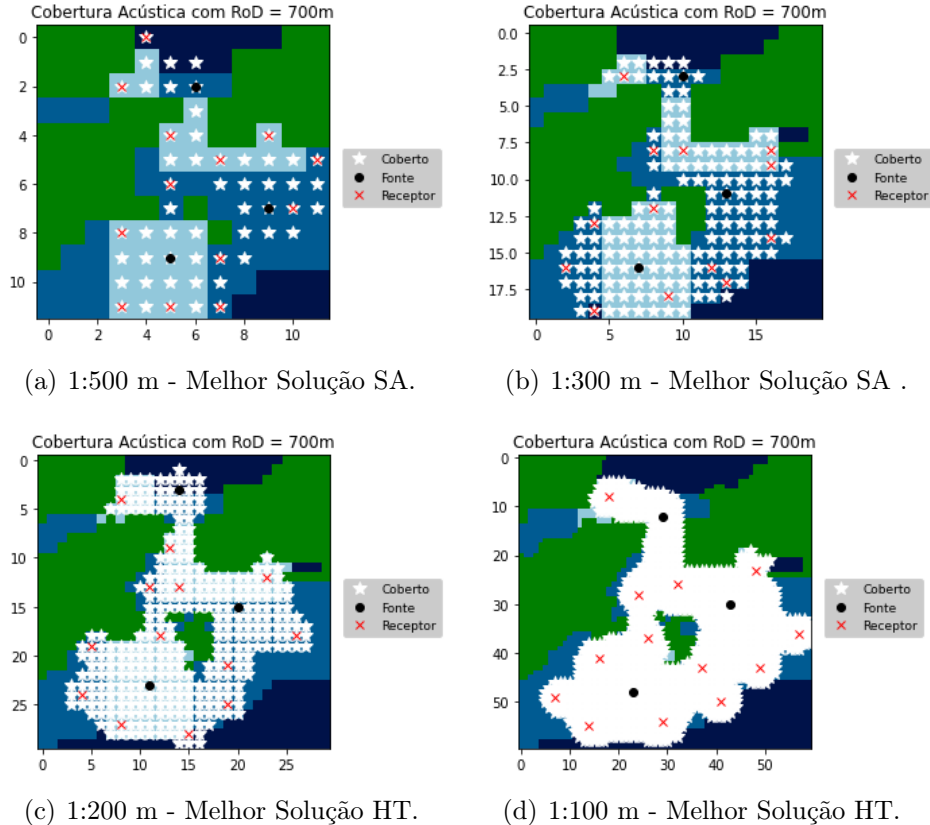


Figura 7.20: Melhores Coberturas para a Área 1

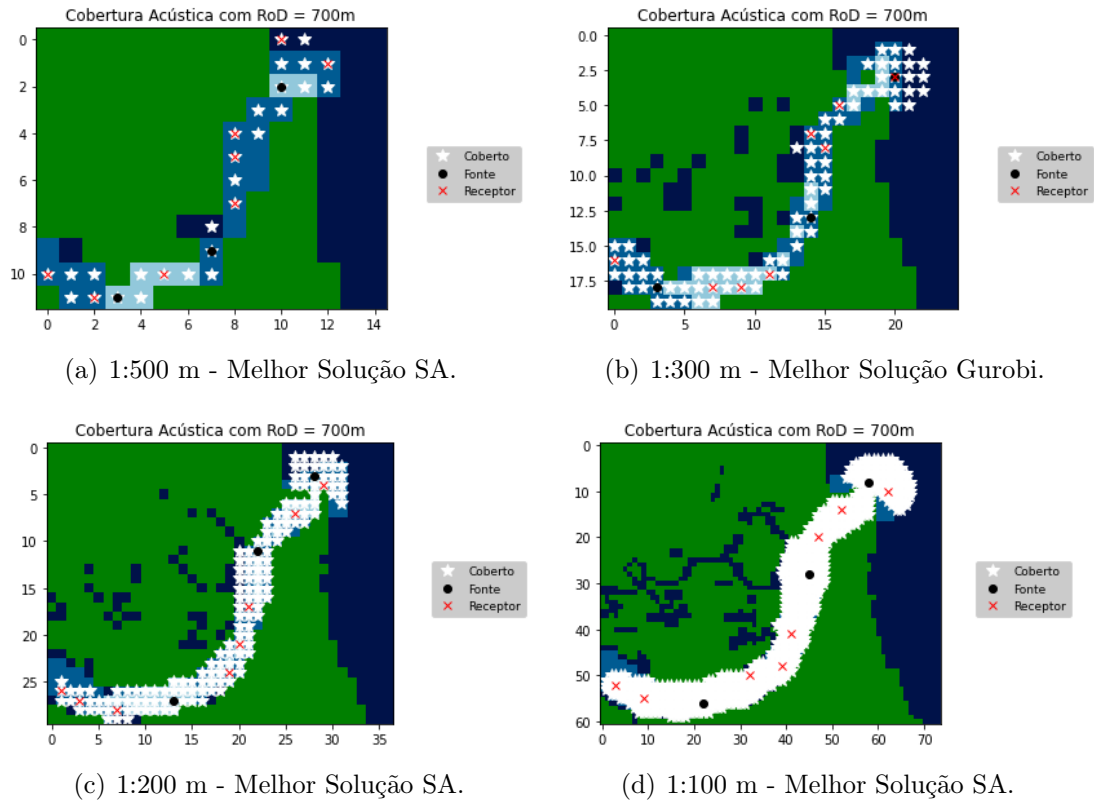


Figura 7.21: Melhores coberturas para a Área 2

Através dos gráficos apresentados nas Figuras 7.16(a), 7.16(b), 7.17(a), 7.17(b), 7.18(a), 7.18(b), 7.19(a), 7.19(b), é possível perceber que a quantidade de fontes e receptores são as mesmas para as diferentes escalas. Além disso, as posições em que esses sensores foram instalados nos distintos *grids* são similares, ou seja, para as diferentes escalas obtêm-se coberturas acústicas muito parecidas entre si.



# Capítulo 8

## Conclusões

O Sonar ativo é um equipamento utilizado para garantir o poder marítimo e a soberania nacional, podendo ser empregado para cobrir uma região de interesse, com o objetivo de realizar monitoramento e controle de ameaças. Há dois tipos de sistemas de sonares ativos que podem ser utilizados para realizar a cobertura acústica de uma região: o sistema monostático e o sistema multistático. O sistema multistático possui vantagens financeiras, táticas, estratégica em relação ao sistema monostático.

No presente estudo foram empregados quatro modelos matemáticos: CTCC, CTPRB, CPCC e CPPBR. O modelo CTPRB é o modelo que apresentou o melhor resultado para a cobertura total das regiões em estudo, ou seja, cobriu 100% da região com menor custo de cobertura. O modelo CPPBR<sub>igual</sub> obteve o melhor resultado para a cobertura parcial da região (maximizar o peso de cobertura da região), sendo o mais indicado para cobrir uma área considerando uma probabilidade mínima de detecção de 50% para detecção de um alvo. Desta forma, o modelo de sensor probabilístico é o modelo que obteve melhor desempenho para detecção de ameaças neste estudo, sendo considerado melhor que o modelo *Cookie-Cutter*. Por fim, nos casos em que pretende-se dividir as sub-regiões com diferentes probabilidades mínimas de detecção, apenas deve ser empregada se houver um orçamento adequado ou caso haja a necessidade de que algumas regiões tenham maior probabilidade de detecção de um alvo.

Apesar do Modelo de Cobertura Parcial de Detecção Probabilístico ser o mais vantajoso neste estudo, pois obteve o maior peso de cobertura, os tempos computacionais para resolução desse modelo são extremamente elevados. Além disso, em alguns casos, o otimizador não conseguiu garantir a melhor solução, pois o valor do *gap* foi diferente de zero. Foram propostas duas abordagens para melhorar os resultados obtidos pelo modelo CPPRB: a primeira consiste em resolver o problema dual por meio do Método de Feixes para obter um melhor limite superior (limitante dual), porém essa abordagem não apresentou um resultado satisfatório; a segunda abordagem foi resolver o problema dual com Lagrangeano Sharp. Porém, para esse estudo, não foi possível obter a solução do problema dual.

A Heurística Gulosa Randômica apresentou resultados em um tempo computacional baixo, entretanto a qualidade desses resultados não foram muito boas. Já a Heurística de Troca e o *Simulated Annealing* obtiveram resultados bons e com tempo computacional mais menor que o otimizador Gurobi. Além disso o *Simulated Annealing* apresentou-se mais vantajoso, pois obteve melhores médias, medianas e menor desvio padrão para a maioria dos casos estudados. As três heurísticas podem

ser aplicadas para as diferentes escalas dos mapas estudados, sendo uma vantagem significativa em comparação ao otimizador aplicado neste estudo. Desta forma, concluiu-se que tanto a HGR, a HT e o SA são ferramentas interessantes para serem aplicados em situações reais, pois fornecem informações sobre a cobertura parcial de uma região em tempo computacional aceitável.

Para trabalhos futuros, sugere-se que sejam empregados outros métodos de resoluções para obtenção de resultados mais rápidos e que promovam a eliminação do *gap* em todos os casos estudados. Sugere-se também o desenvolvimento de novos movimentos da busca local que alterem o número de fontes e receptores, sem que o tempo computacional das heurísticas seja afetado. Outro trabalho possível, é o desenvolvimento de novas metaheurísticas, com o objetivo de comparar o desempenho com as heurísticas utilizadas neste estudo. Além disso, o emprego de cartas náuticas para a definição das regiões de interesse e o desenvolvimento de uma interface com o usuário seriam outras propostas de trabalhos futuros. Por fim, recomenda-se que seja realizado um estudo de cobertura acústica considerando que as variáveis sejam contínuas, desta forma poderia se obter uma maior precisão na posição de instalação das fontes e receptores.

# Referências Bibliográficas

- AL-RABIAAH, S., HOSNY, M., ALMUHAIDEB, S., 2022, “An Efficient Greedy Randomized Heuristic for the Maximum Coverage Facility Location Problem with Drones in Healthcare”, *Applied Sciences*, v. 12, n. 3.
- ANDRADE, I. D. O., DA ROCHA, A. J. R., FRANCO, L. G. A., 2019, *Sistema de Gerenciamento da Amazônia Azul: soberania, vigilância e defesa das águas jurisdicionais brasileiras*. Relatório técnico, Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea).
- BEN-AMEUR, W., 2004, “Computing the initial temperature of simulated annealing”, *Computational optimization and applications*, v. 29, n. 3, pp. 369–385.
- BLUM, C., ROLI, A., 2003, “Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison”, *ACM computing surveys (CSUR)*, v. 35, n. 3, pp. 268–308.
- BONNANS, J.-F., GILBERT, J. C., LEMARÉCHAL, C., et al., 2006, *Numerical optimization: theoretical and practical aspects*. Springer Science & Business Media.
- BOWEN, J. I., MITNICK, R. W., 1999, “A multistatic performance prediction methodology”, *Johns Hopkins APL technical digest*, v. 20, n. 3, pp. 425.
- CABRAL, R. P., 2020, “A Marinha do Brasil na Batalha do Atlântico, 1942-1945”, *Navigator*, v. 16, n. 32, pp. 9–26.
- CALDERÍN, J. F., MASEGOSA, A. D., PELTA, D. A., 2017, “An algorithm portfolio for the dynamic maximal covering location problem”, *Memetic Computing*, v. 9, n. 2, pp. 141–151.
- CASERTA, M., 2007, “Tabu search-based metaheuristic algorithm for large-scale set covering problems”. In: *Metaheuristics*, Springer, pp. 43–63.

- ČERNÝ, V., 1985, “Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm”, *Journal of optimization theory and applications*, v. 45, n. 1, pp. 41–51.
- CHURCH, R., REVELLE, C., 1974, “The maximal covering location problem”. In: *Papers of the regional science association*, v. 32, pp. 101–118. Springer-Verlag Berlin/Heidelberg.
- COLL, N., FORT, M., SAUS, M., 2022, “Coverage area maximization with parallel simulated annealing”, *Expert Systems with Applications*, v. 202, pp. 117185.
- COX, H., 1989, “Fundamentals of bistatic active sonar”. In: *Underwater acoustic data processing*, Springer, pp. 3–24.
- CRAPARO, E., FÜGENSCHUH, A., HOF, C., et al., 2018, “Optimizing Source and Receiver Placement in Multistatic Sonar Networks to Monitor Fixed Targets”, *European Journal of Operational Research*, v. 272 (02).
- CRAPARO, E. M., KARATAS, M., KUHN, T. U., 2017, “Sensor placement in active multistatic sonar networks”, *Naval Research Logistics (NRL)*, v. 64, n. 4, pp. 287–304.
- CRAWFORD, B., SOTO, R., CISTERNAS-CANEO, F., et al., 2021, “A comparison of Learnheuristics using different Reward Functions to solve the Set Covering Problem”. In: *International Conference on Optimization and Learning*, pp. 74–85. Springer.
- CURRENT, JOHN R E SCHILLING, D. A., 1990, “Analysis of errors due to demand data aggregation in the set covering and maximal covering location problems”, *Geographical Analysis*, v. 22, n. 2, pp. 116–126.
- CURTIS, S. A., 2003, “The classification of greedy algorithms”, *Science of Computer Programming*, v. 49, n. 1, pp. 125–157.
- D’AMICO, A., PITTENGER, R., 2009, *A brief history of active sonar*. Relatório técnico, SPACE AND NAVAL WARFARE SYSTEMS CENTER SAN DIEGO CA.
- DANACH, K., GELAREH, S., MONEMI, R. N., 2019, “The capacitated single-allocation p-hub location routing problem: a Lagrangian relaxation and a hyper-heuristic approach”, *EURO Journal on Transportation and Logistics*, v. 8, n. 5, pp. 597–631.

- DE MELO, J. D. G., 2009, *On general augmented lagrangians and a modified subgradient algorithm*. Doutorado em matemática, Instituto Nacional de Matemática Pura Aplicada, Rio de Janeiro - Brasil.
- DÍAZ, J. A., LUNA, D. E., CAMACHO-VALLEJO, J.-F., et al., 2017, “GRASP and hybrid GRASP-Tabu heuristics to solve a maximal covering location problem with customer preference ordering”, *Expert Systems with Applications*, v. 82, pp. 67–76.
- ERİŞKİN, L., 2021, “Point coverage with heterogeneous sensor networks: A robust optimization approach under target location uncertainty”, *Computer Networks*, v. 198, pp. 108416.
- FEWELL, M. P., OZOLS, S., 2011, *Simple Detection-Performance Analysis of Multistatic Sonar for Anti-Submarine Warfare*. Technical report dsto-tr-2562, Edinburgh South Australia: Defence Science and Technology Organisation.
- FISHER, M. L., 1981, “The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems”, *Management science*, v. 27, n. 1, pp. 1–18.
- FÜGENSCHUH, A. R., CRAPARO, E. M., KARATAS, M., et al., 2021, “Solving multistatic sonar location problems with mixed-integer programming”, *Optimization and Engineering*, v. 21, n. 1, pp. 273–303.
- GALVÃO, R. D., ESPEJO, L. G. A., BOFFEY, B., 2000, “A comparison of Lagrangean and surrogate relaxations for the maximal covering location problem”, *European Journal of Operational Research*, v. 124, n. 2, pp. 377–389.
- GOMES, H. C., 2008, *Relaxação lagrangeana com fixação de variáveis aplicada ao problema de sequenciamento em uma máquina*. Mestrado em engenharia de produção, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - Brasil.
- GUROBI OPTIMIZATION, LLC, 2022. “Gurobi Optimizer Reference Manual”. Disponível em: <<https://www.gurobi.com>>.
- HOCHBAUM, D. S., 1994, “Lower and upper bounds for the allocation problem and other nonlinear optimization problems”, *Mathematics of Operations Research*, v. 19, n. 2, pp. 390–409.

- HOF, C., 2015, *Optimization of source and receiver placement in multistatic sonar environments*. Tese de Mestrado, Naval Postgraduate School address=Monterey - USA type=Mestrado .
- IZMAILOV, A., SOLODOV, M., 2018, *Otimização, volume 2: métodos computacionais*. IMPA.
- JOHNSON, D. S., ARAGON, C. R., MCGEOCH, L. A., et al., 1989, “Optimization by simulated annealing: An experimental evaluation; part I, graph partitioning”, *Operations research*, v. 37, n. 6, pp. 865–892.
- KARATAS, M., GUNAL, M. M., CRAPARO, E. M., 2016, “Performance evaluation of mobile multistatic search operations via simulation”, *Performance evaluation*, p. 04.
- KIRKPATRICK, S., GELATT JR, C. D., VECCHI, M. P., 1983, “Optimization by simulated annealing”, *science*, v. 220, n. 4598, pp. 671–680.
- KUHN, T. U., 2014, *Optimal sensor placement in active multistatic sonar networks*. Tese de Mestrado, Naval Postgraduate School address=Monterey - USA type=Mestrado .
- LAN, G., DEPUY, G. W., WHITEHOUSE, G. E., 2007, “An effective and simple heuristic for the set covering problem”, *European journal of operational research*, v. 176, n. 3, pp. 1387–1403.
- LANZA-GUTIERREZ, J. M., CABALLE, N., CRAWFORD, B., et al., 2020, “Exploring further advantages in an alternative formulation for the set covering problem”, *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2020.
- LI, H., MUKHOPADHYAY, S. K., WU, J.-J., et al., 2020, “Balanced maximal covering location problem and its application in bike-sharing”, *International Journal of Production Economics*, v. 223, pp. 107513.
- LU, J., SHENG, X., LING, Q., et al., 2013, “The research on the coverage area of multistatic sonar under various work modes”. In: *2013 OCEANS - San Diego*, pp. 1–4.
- MEGIDDO, N., ZEMEL, E., HAKIMI, S. L., 1983, “The maximum coverage location problem”, *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, v. 4, n. 2, pp. 253–261.
- METROPOLIS, N., ROSENBLUTH, A. W., ROSENBLUTH, M. N., et al., 1953, “Equation of state calculations by fast computing machines”, *The journal of chemical physics*, v. 21, n. 6, pp. 1087–1092.

- MONTIBELLER, F., 2003, *Aplicação do método de feixes ao problema de planejamento da operação de curto prazo para sistemas hidrotérmicos*. Mestrado em engenharia elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - Brasil.
- MURRAY, A. T., 2016, “Maximal coverage location problem: impacts, significance, and evolution”, *International Regional Science Review*, v. 39, n. 1, pp. 5–27.
- MURRAY, A. T., CHURCH, R. L., 1996, “Applying simulated annealing to location-planning models”, *Journal of Heuristics*, v. 2, n. 1, pp. 31–53.
- NAVAUX, P., DE ROSE, C. A., PILLA, L. L., 2011, “Fundamentos das arquiteturas para processamento paralelo e distribuído”, *XI Escola Regional de Alto Desempenho do Estado do Rio Grande do Sul-2011-Porto Alegre, RS*, pp. 22–59.
- NGATCHOU, P., FOX, W., EL-SHARKAWI, M., 2006, “Multiobjective Multistatic Sonar Sensor Placement”. In: *2006 IEEE International Conference on Evolutionary Computation*, pp. 2713–2719.
- OZOLS, S., FEWELL, M. P., 2011, *On the Design of Multistatic Sonobuoy Fields for Area Search*. Technical report dsto-tr-2563, Edinburgh South Australia: Defence Science and Technology Organisation.
- ROCKAFELLAR, R. T., WETS, R. J.-B., 2009, *Variational analysis*, v. 317. Springer Science & Business Media.
- RODRIGUES, M. S., 2021, “Plano Estratégico da Marinha PEM 2040”, *REVISTA DA ESCOLA DE GUERRA NAVAL*, v. 27, n. 1, pp. 13–30.
- ROOSTA, S. H., 2012, *Parallel processing and parallel algorithms: theory and computation*. Springer Science & Business Media.
- SUMAN, B., KUMAR, P., 2006, “A survey of simulated annealing as a tool for single and multiobjective optimization”, *Journal of the operational research society*, v. 57, n. 10, pp. 1143–1160.
- TIWARI, R., JAYASWAL, S., SINHA, A., 2021, “Alternate solution approaches for competitive hub location problems”, *European Journal of Operational Research*, v. 290, n. 1, pp. 68–80.
- TORRES, A. C. L., 2019, *Modelação da acústica submarina e previsão sonar*. Mestre em ciências militares navais, Escola Naval, Lisboa - Portugal.

- URICK, R., 1983, *Principles of underwater sound*. New York, McGraw-Hill.
- WASHBURN, A., KARATAS, M., 2015, “Multistatic Search Theory”, *MILITARY OPERATIONS RESEARCH*, v. 20 (03), pp. 21–38. doi: 10.5711/1082598320121.
- WEI, R., MURRAY, A. T., 2015, “Continuous space maximal coverage: Insights, advances and challenges”, *Computers & operations research*, v. 62, pp. 325–336.
- WHITAKER, R., 1983, “A fast algorithm for the greedy interchange for large-scale clustering and median location problems”, *INFOR: Information Systems and Operational Research*, v. 21, n. 2, pp. 95–108.
- XHAFA, F., SÁNCHEZ, C., BAROLLI, A., et al., 2015, “Solving mesh router nodes placement problem in Wireless Mesh Networks by Tabu Search algorithm”, *Journal of Computer and System Sciences*, v. 81, n. 8, pp. 1417–1428.
- XIA, L., XIE, M., XU, W., et al., 2009, “An empirical comparison of five efficient heuristics for maximal covering location problems”. In: *2009 IEEE/INFORMS International Conference on Service Operations, Logistics and Informatics*, pp. 747–753. IEEE.
- ZANAKIS, S. H., EVANS, J. R., 1981, “Heuristic “optimization”: Why, when, and how to use it”, *Interfaces*, v. 11, n. 5, pp. 84–91.
- ZARANDI, M. F., DAVARI, S., SISAKHT, S. H., 2011, “The large scale maximal covering location problem”, *Scientia Iranica*, v. 18, n. 6, pp. 1564–1570.
- ZHAO, X., LUH, P., 2002, “New bundle methods for solving Lagrangian relaxation dual problems”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 113, n. 2, pp. 373–397.