



## GRAFOS DE POLITOPOS DE EMPARELHAMENTOS

Carlos Henrique Pereira do Nascimento

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Produção.

Orientadores: Nair Maria Maia de Abreu  
Liliana Manuela Gaspar Cerveira  
da Costa  
Laura Patuzzi

Rio de Janeiro  
Março de 2017

# GRAFOS DE POLITOPOS DE EMPARELHAMENTOS

Carlos Henrique Pereira do Nascimento

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO.

Examinada por:

---

Profa. Nair Maria Maia de Abreu, D.Sc.

---

Profa. Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa, Ph.D.

---

Profa. Laura Patuzzi, D.Sc.

---

Profa. Enide Cascais Silva Andrade, Ph.D.

---

Prof. Laura Silvia Bahiense da Silva Leite, D.Sc.

---

Prof. Leonardo Silva de Lima, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2017

Pereira do Nascimento, Carlos Henrique

Grafos de Politopos de Emparelhamentos/Carlos Henrique  
Pereira do Nascimento. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2017.  
XII, 102 p. 29, 7cm.

Orientadores: Nair Maria Maia de Abreu

Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa

Laura Patuzzi

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia  
de Produção, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 98 – 100.

1. Grafo. 2. Politopo de Emparelhamentos. 3. Grau de  
um Emparelhamento. I. Maia de Abreu, Nair Maria *et al.* II.  
Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de  
Engenharia de Produção. III. Título.

*À minha família.*

# Agradecimentos

A Deus, por tudo que Ele realiza em minha vida.

À minha orientadora Nair, por ter me orientado e acompanhado durante estes quatro anos, com sua presença ativa e suas ideias que muito me enriqueceram. Seus conselhos foram fundamentais para a minha formação.

Às minhas coorientadoras Liliana e Laura, pelo apoio, pelas conversas motivadoras e pela disponibilidade de sempre.

À minha esposa Vânia e ao meu filho Lucas Henrique, por estarem ao meu lado em todos os momentos e serem a razão da minha vida.

Aos meus pais Édio e Maria, por tudo que me ensinaram, pelo exemplo, dedicação, amor e pelas orações.

Às minhas irmãs, Eva, Célia e Dulcinéia, e a todos da minha família, pelo carinho! Obrigado por estarem presentes, mesmo distantes.

Aos amigos e amigas do Departamento de Matemática e de todo o Instituto de Ciências Exatas da UFF, pelo apoio e amizade.

Aos amigos do Grupo de Teoria Espectral de Grafos do Rio de Janeiro (TEG/RJ), por terem me acolhido.

Aos amigos Camila, Rogério, Joice, Ricardo e Renato, companheiros de estudos, caronas e cafés!

Aos amigos Diego e Tiago, pela parceria no desenvolvimento do software *Epem-Graph*.

A todos os meus amigos, pelo companheirismo!

Aos professores e funcionários do Programa de Pós Graduação em Engenharia de Produção (PEP/COPPE), especialmente ao coordenador do programa, professor Samuel Jurkiewicz, pelo apoio de sempre.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todos aqueles que, de uma forma ou de outra, acompanharam a minha caminhada durante estes quatro anos. A vocês, muito obrigado!

*Dai graças ao Senhor porque Ele é bom, eterna é sua misericórdia. (Salmos 117,29)*

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## GRAFOS DE POLITOPOS DE EMPARELHAMENTOS

Carlos Henrique Pereira do Nascimento

Março/2017

Orientadores: Nair Maria Maia de Abreu

Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa

Laura Patuzzi

Programa: Engenharia de Produção

O politopo de emparelhamentos de um grafo  $G$ ,  $\mathcal{M}(G)$ , é o fecho convexo dos vetores de incidência dos emparelhamentos de  $G$ . O grafo cujos vértices e arestas são os vértices e arestas de  $\mathcal{M}(G)$  é o esqueleto deste politopo, denotado por  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ . Nesta tese, mostramos como determinar o grau de um vértice qualquer de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ . Provamos que o grau mínimo deste grafo é igual ao número de arestas do grafo original  $G$  e identificamos todos os emparelhamentos de  $G$  que correspondem a vértices de grau mínimo. Apresentamos dois limites inferiores para o grau máximo de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  e encontramos uma fórmula para determinar este grau quando  $G$  é um ciclo ou um grafo completo. Caracterizamos os grafos cujos respectivos esqueletos dos politopos de emparelhamentos são grafos regulares. Investigamos quais grafos de determinadas classes podem ser ou não esqueletos de politopos de emparelhamentos. Finalmente, provamos que, dados dois grafos  $G$  e  $G'$  conexos, distintos de  $K_3$  e  $S_{1,3}$ , se  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  e  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G'))$  são isomorfos, então  $G$  é isomorfo a  $G'$ .

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## MATCHINGS POLYTOPES GRAPHS

Carlos Henrique Pereira do Nascimento

March/2017

Advisors: Nair Maria Maia de Abreu

Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa

Laura Patuzzi

Department: Production Engineering

The matching polytope of a graph  $G$ ,  $\mathcal{M}(G)$ , is the convex hull of the incidence vectors of matchings of  $G$ . The graph whose vertices and edges are the vertices and edges of  $\mathcal{M}(G)$  is the skeleton of this polytope, denoted by  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ . In this thesis, we show how to determine the degree of any vertex of  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ . We prove that the minimum degree of this graph is equal to the number of edges of the original graph  $G$  and we identify all the matchings of  $G$  that correspond to vertices of minimum degree. We present two lower bounds for the maximum degree of  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  and we compute this degree when the graph  $G$  is a cycle or a complete graph. We characterize the graphs whose respective skeletons of the matching polytopes are regular graphs. We investigate which graphs of certain classes may or may not be skeletons of matching polytopes. Finally, we prove that given two connected graphs  $G$  and  $G'$ , different from  $K_3$  e  $S_{1,3}$ , if  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  and  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G'))$  are isomorphic, then  $G$  is isomorphic to  $G'$ .

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Preliminares</b>	<b>5</b>
2.1 Grafos . . . . .	5
2.2 Politopos . . . . .	10
2.3 Politopos de emparelhamentos . . . . .	13
2.4 Politopo acíclico de Birkhoff . . . . .	19
<b>3 Esqueletos de politopos de emparelhamentos de grafos em classes especiais</b>	<b>26</b>
3.1 Alguns exemplos . . . . .	26
3.2 Classes especiais de grafos . . . . .	29
3.2.1 O grafo $P_{n,t}^i$ . . . . .	30
3.2.2 O grafo $P_n^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ . . . . .	32
3.2.3 O grafo $S_n^k$ . . . . .	34
3.2.4 O grafo $B_p$ . . . . .	37
<b>4 Grau de um emparelhamento</b>	<b>39</b>
4.1 Cálculo do grau de um emparelhamento . . . . .	39
4.2 Grau mínimo . . . . .	44
<b>5 Sobre o grau máximo</b>	<b>48</b>
5.1 Partição de um emparelhamento . . . . .	48
5.2 Partição do conjunto de arestas de um grafo . . . . .	50
5.3 Graus máximos de $\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_n))$ e $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_n))$ . . . . .	56
5.4 Limites para o grau máximo . . . . .	65
<b>6 Grafos versus esqueletos</b>	<b>70</b>
6.1 Grafos que realizam esqueletos de politopos de emparelhamentos . . . . .	70

6.2	Sobre isomorfismo de EPEs . . . . .	74
<b>7</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>80</b>
<b>A</b>	<b>Software <i>EpemGraph</i></b>	<b>82</b>
A.1	$P_4$ . . . . .	82
A.2	Grafo $G$ . . . . .	84
A.3	$C_5$ . . . . .	85
A.4	$K_6$ . . . . .	85
A.5	$K_3 \cup S_{1,1}$ . . . . .	87
A.6	Grafo de Petersen . . . . .	87
<b>B</b>	<b>Alguns grafos e seus EPEs</b>	<b>93</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>98</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>101</b>

# Lista de Figuras

2.1	Subgrafos proibidos para $H$ ser um grafo linha . . . . .	8
2.2	Politopo $\mathcal{P}$ . . . . .	10
2.3	Cubo $C$ . . . . .	11
2.4	$K_4$ e $\mathcal{G}(C) = Q_3$ . . . . .	13
2.5	$K_3$ , $\mathcal{M}(K_3)$ e $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_3)) = K_4$ . . . . .	14
2.6	Grafo não bipartido com emparelhamento perfeito . . . . .	15
2.7	$S = (1/2, 1/2, 1/2) \notin \mathcal{M}(K_3)$ . . . . .	16
2.8	Caminho $P_3$ . . . . .	16
2.9	$M\Delta N$ é união disjunta de caminhos e ciclos . . . . .	18
2.10	$P_5$ e $\mathcal{G}(\Omega_5(P_5))$ . . . . .	20
2.11	Para $M = \{e_2, e_4\}$ , $P = e_2e_3$ não é $M$ -bom . . . . .	20
2.12	Decomposição de uma árvore a partir de um vértice $M$ -insaturado interno	21
2.13	$v_1$ e $v_2$ são vértices quase pendentos . . . . .	23
2.14	<i>Starlike</i> $S(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ . . . . .	24
3.1	Árvore $T$ e seus emparelhamentos . . . . .	27
3.2	$\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))$ . . . . .	27
3.3	Grafo sem ciclo par e seu EPE . . . . .	27
3.4	$C_4$ e $\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_4))$ . . . . .	28
3.5	$2K_2$ e $\mathcal{G}(\mathcal{M}(2K_2)) = C_4$ . . . . .	28
3.6	$S_{1,3} \cup K_2$ e $\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_{1,3} \cup K_2))$ . . . . .	29
3.7	O grafo unicíclico $G = T \cup \{e\}$ e seus novos emparelhamentos obtidos com a adição da aresta $e = uv$ . . . . .	30
3.8	$P_{9,3}^3$ . . . . .	31
3.9	$P_{6,2}^2$ . . . . .	32
3.10	$P_9^{2,4,7}$ . . . . .	32
3.11	$P_{11}^{4,7}$ . . . . .	33
3.12	$P_{10}^{3,5}$ . . . . .	33
3.13	$S_9^3$ . . . . .	34
3.14	$S_4^1$ e $\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_4^1))$ . . . . .	35
3.15	<i>Triangular Book</i> $B_6$ . . . . .	38

3.16	Os grafos $B_2$ e $\mathcal{G}(\mathcal{M}(B_2))$ . . . . .	38
4.1	Caminhos e ciclos $M$ -bons . . . . .	40
4.2	Árvore $T$ . . . . .	41
4.3	$e_2$ é um elo e $e_5$ é uma aresta pendente . . . . .	45
4.4	$G = K_3 \cup S_{1,1}$ e $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_3 \cup S_{1,1}))$ . . . . .	47
5.1	O caminho $P = fe_1e_2g$ possui todos os vértices saturados por arestas de $M$ . . . . .	49
5.2	O grafo $G_1$ e o emparelhamento $M$ . . . . .	49
5.3	O grafo $G_2$ e o emparelhamento $N$ . . . . .	49
5.4	Subgrafos $B_1, B_2, B_3$ e $B_4$ do grafo $G_1$ da Figura 5.2 . . . . .	51
5.5	Para $M = \{e_2, e_4\}, E_{k+1} = \emptyset$ . . . . .	51
5.6	Partição $M$ -boa . . . . .	54
5.7	$B_i$ é o caminho $P_{n_i}$ . . . . .	56
5.8	Partição $N$ -boa de $E(P_{11})$ . . . . .	56
5.9	$C_n$ com pelo menos dois vértices $M$ -insaturados . . . . .	58
5.10	$C_4$ e seu EPE . . . . .	61
5.11	$K_6$ . . . . .	62
5.12	$K_5 = K_4 \vee u$ . . . . .	64
5.13	$M = \{e_2, e_4, e_6\}$ é adjacente aos emparelhamentos com cardinalidade dois . . . . .	67
5.14	$\Delta_2 < \Delta_1 < \Delta$ . . . . .	69
5.15	$\Delta_1 < \Delta_2 < \Delta$ . . . . .	69
6.1	Grafos $H_1$ e $H_2$ . . . . .	71
6.2	$T$ não possui $P_6$ como subgrafo . . . . .	74
6.3	$\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_4)) = \mathcal{L}(H_1)$ . . . . .	74
6.4	$\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_5)) = \mathcal{L}(H_2)$ . . . . .	74
6.5	Grafo com aresta pendente e elo . . . . .	76
A.1	Caminho $P_4$ . . . . .	82
A.2	Grafo $G$ . . . . .	84
A.3	$C_5$ . . . . .	85
A.4	$K_3 \cup S_{1,1}$ . . . . .	87
A.5	Grafo de Petersen . . . . .	87
B.1	Grafos $H_1$ e $H_2$ . . . . .	93
B.2	Grafos $1, 2, \dots, 18$ . . . . .	96
B.3	Grafos $19, 20, \dots, 30$ . . . . .	97

# Lista de Tabelas

6.1	$\varphi_{e_2}, \varphi_{e_5}$ e $\varphi_{e_4}$ . . . . .	76
B.1	Grafos sem vértices isolados com EPEs planares . . . . .	93
B.2	Graus mínimo e máximo de EPEs de algumas classes de grafos . . . . .	94
B.3	Graus mínimo e máximo dos grafos conexos que possuem de 2 a 5 vértices	95

# Capítulo 1

## Introdução

Um *politopo* é o fecho convexo de um número finito de pontos em  $\mathbb{R}^n$ . É um objeto geométrico estudado desde a antiguidade e a beleza de sua teoria é complementada pela importância de seu uso em muitas áreas da matemática, tais como, otimização combinatoria, geometria algébrica e topologia algébrica. O Teorema de Euler, que relaciona o número de vértices, arestas e faces de politopos tridimensionais, é considerado como marco inicial na teoria dos politopos. Segundo Grunbaum [1], desde meados do séc. XIX, politopos de quatro ou mais dimensões atraíram o interesse de muitos pesquisadores. A tentativa de generalização do Teorema de Euler, a busca de politopos com características de regularidade e muitos outros tópicos relacionados, deram um impulso adicional para a investigação de politopos convexos. Ainda, de acordo com este autor, a partir do início do séc. XX, o interesse por problemas envolvendo politopos decresceu, principalmente devido à falta de novos resultados significativos. No entanto, com a ascensão das técnicas computacionais e, principalmente, da programação linear, a teoria combinatoria dos politopos convexos atraiu novos olhares. Assim, apesar da existência de muitos resultados obtidos de forma isolada por diferentes autores, o surgimento de uma teoria mais concisa sobre este tópico começou em 1962, com os trabalhos de Klee, que serviram de base para desenvolvimentos posteriores (veja [1]).

Um *emparelhamento* (em inglês, *matching*) de um grafo é um conjunto de arestas duas a duas não adjacentes, podendo ser vazio. Caso o conjunto de vértices incidentes das arestas de um emparelhamento seja igual ao conjunto de vértices do grafo, dizemos que o emparelhamento é *perfeito*. Um emparelhamento  $M$  é dito ser um *emparelhamento máximo* se não existe outro emparelhamento com mais arestas que  $M$ . Emparelhamentos fazem parte tanto do domínio da teoria dos grafos, como da otimização combinatoria, com destaque para vários problemas relacionados, como por exemplo, problemas de atribuição/designação, problemas de escalonamento e problemas de cobertura.

Dados um grafo  $G = (V, E)$  e uma função  $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  que atribui *pesos* às arestas de  $G$ , o peso de um subconjunto  $F \subset E$  é dado por  $p(F) = \sum_{e \in F} p(e)$ . Por vezes, deseja-se obter um emparelhamento  $M$  do grafo  $G$  que tenha peso  $p(M)$  mínimo ou máximo, ou

seja, procura-se determinar

$$\begin{aligned} \min\{p(M) : M \text{ é emparelhamento de } G\} \text{ ou} \\ \max\{p(M) : M \text{ é emparelhamento de } G\}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Os problemas anteriores podem ser formulados como problemas de otimização linear inteira (veja [2]), associando-se cada emparelhamento  $M$  do grafo  $G$  ao vetor de incidência  $\chi_M$  em  $\mathbb{Z}^E$ , definido por

$$\chi_M(e) = \begin{cases} 1, & \text{se } e \in M; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

No que segue, consideraremos apenas o problema de maximização, dado que o problema de minimização é similar.

Considerando-se a relaxação linear de  $\chi_M$ , ou seja,  $\chi_M$  é um vetor de  $\mathbb{R}^E$  tal que  $0 \leq \chi_M(e) \leq 1$ ,  $\forall e \in E$ , e considerando-se ainda  $p$  como um vetor em  $\mathbb{R}^E$ , tem-se  $p(M) = p^T \chi_M$ . Portanto, o problema (1.1) pode ser reescrito por

$$\max\{p^T \chi_M : M \text{ é emparelhamento de } G\}, \quad (1.2)$$

o que equivale a maximizar a função linear  $p^T x$  sobre o conjunto finito de vetores  $\{\chi_M : M \text{ é emparelhamento de } G\}$ . Assim, o valor ótimo não muda se maximizarmos a função linear sobre o fecho convexo deste conjunto,

$$\max\{p^T x : x \in \text{conv}\{\chi_M : M \text{ é emparelhamento de } G\}\}. \quad (1.3)$$

O conjunto  $\text{conv}\{\chi_M : M \text{ é emparelhamento de } G\}$  é um politopo em  $\mathbb{R}^E$ , denotado por  $\mathcal{M}(G)$ , chamado de *politopo de emparelhamentos* (em inglês, *matching polytope*) de  $G$ . Sendo  $\mathcal{M}(G)$  um politopo, existem uma matriz  $A$  e um vetor  $b$  tais que

$$\mathcal{M}(G) = \text{conv}\{\chi_M : M \text{ é emparelhamento de } G\} = \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0, Ax \leq b\}.$$

Logo, (1.3) é equivalente a

$$\max\{p^T x : x \geq 0, Ax \leq b\}, \quad (1.4)$$

mostrando que os problemas iniciais (1.1) podem ser formulados como problemas de programação linear.

O problema de atribuição, em particular, pode ser descrito utilizando-se o exemplo de designação de atividades a pessoas. Cada atividade deve ser designada a apenas uma pessoa, e cada pessoa pode ter no máximo uma atividade. Supondo que existe um valor associado a cada possível designação, o problema consiste em encontrar a melhor

designação em termos de valor (pode ser custo mínimo, lucro máximo, etc), e a solução é equivalente a encontrar um emparelhamento perfeito de custo máximo/mínimo em um grafo bipartido.

O conjunto  $\text{conv}\{\chi_M : M \text{ é emparelhamento perfeito de } G\}$  também é um politopo em  $\mathbb{R}^E$ , denotado por  $\mathcal{PM}(G)$ , chamado de *politopo de emparelhamentos perfeitos* (em inglês, *perfect matching polytope*) de  $G$ . Quando  $G$  é o grafo bipartido completo  $K_{n,n}$ ,  $\mathcal{PM}(G)$  é o politopo  $\Omega_n$  formado pelo conjunto de todas as matrizes duplamente estocásticas  $n \times n$ , conhecido como politopo de Birkhoff. Segundo o *Teorema de Birkhoff*,  $\Omega_n$  é o fecho convexo do conjunto das matrizes de permutação  $n \times n$  (veja [3, 4]).

Dado um politopo  $\mathcal{P}$ , o *esqueleto*  $\mathcal{G}(\mathcal{P})$  é o grafo cujos vértices são os vértices (faces de dimensão 0) de  $\mathcal{P}$  e cujas arestas são as arestas (faces de dimensão 1) de  $\mathcal{P}$ . Uma das dificuldades no estudo de propriedades de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  é o grande número de vértices e arestas deste grafo. Diante disso, costuma-se estudar  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  para classes específicas de grafos, como árvores; ou estudar o esqueleto de politopos particulares como os de emparelhamentos perfeitos  $\mathcal{G}(\mathcal{PM}(G))$ , cujo número de vértices e arestas é consideravelmente menor; ou ainda, estudar subgrafos dos referidos esqueletos.

O *politopo acíclico de Birkhoff*  $\Omega_n(T)$ , introduzido em [5], é definido como o conjunto das matrizes duplamente estocásticas de ordem  $n$  tais que, para cada matriz, uma entrada positiva está na diagonal principal ou em uma posição  $(i, j)$  que corresponda a uma aresta  $v_i v_j$  de uma árvore fixada  $T$ . Desta forma,  $\Omega_n(T)$  é uma face de  $\Omega_n$  e é isomorfo afim a  $\mathcal{M}(T)$  (veja [5]). Recentemente, em 2014, Abreu et al. [6] determinaram o grau mínimo do esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))$ , para qualquer árvore  $T$ , e encontraram o grau máximo de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))$  para algumas classes de árvores. Em 2015, Fernandes [7] apresentou um algoritmo para calcular o grau de qualquer vértice de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))$ .

Dada a ordem  $n$  de um grafo  $G$ , Bian e Zhang [8] encontraram um limite superior para o número de arestas de  $G$  em função de  $n$ , de modo a se ter  $\mathcal{G}(\mathcal{PM}(G))$  como um grafo bipartido. Para um grafo completo  $K_{2n}$  de ordem  $2n \geq 4$ , Padberg e Rao [9] mostraram que o diâmetro de  $\mathcal{G}(\mathcal{PM}(G))$  é 2, caso  $n \geq 4$ , e se  $2 \leq n \leq 3$ , o diâmetro será 1. Neste último caso, o grafo  $\mathcal{G}(\mathcal{PM}(G))$  é completo. Tal observação levou à questão de caracterizar grafos  $G$  cujos correspondentes esqueletos  $\mathcal{G}(\mathcal{PM}(G))$  sejam grafos completos. Um tal grafo  $G$  é chamado de *PM-compacto* (veja [10]).

O *grafo de emparelhamentos máximos*  $\mathcal{M}_{ax}(G)$ , definido em [11] e [12], é aquele cujos vértices são os emparelhamentos máximos de  $G$ , e dois emparelhamentos máximos  $M, N$  de  $G$  são adjacentes em  $\mathcal{M}_{ax}(G)$  se, e somente se,  $|M \setminus N| = 1$ . O grafo  $\mathcal{M}_{ax}(G)$  é um subgrafo do esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ , não necessariamente induzido. Um grafo  $H$  é dito ser um grafo de emparelhamentos máximos se  $\mathcal{M}_{ax}(G) = H$ , para algum grafo  $G$ . Jones, Roehm e Schultz [13] mostraram que caminhos, estrelas, ciclos de comprimento ímpar, grafos completos e  $n$ -cubos são grafos de emparelhamentos máximos. Os pesquisadores Y. Liu, Lin, Huang e Wang [14] encontraram uma fórmula para calcular o grau de um

vértice de  $\mathcal{M}_{ax}(G)$ . Mais tarde, Y. Liu estudou subgrafos particulares de  $\mathcal{M}_{ax}(G)$ , caracterizando os grafos  $G$  tais que  $\mathcal{M}_{ax}(G)$  é regular e mostrando que árvores são grafos de emparelhamentos máximos (veja [15, 16]). Mais recentemente, Y. Liu e Z. Liu [17] definiram o *grafo de emparelhamentos máximos de tipo 2*,  $\mathcal{M}_{ax}^2(G)$ , como aquele cujos vértices são os emparelhamentos máximos de  $G$  e dois emparelhamentos máximos  $M, N$  são adjacentes em  $\mathcal{M}_{ax}^2(G)$  se, e somente se, a diferença simétrica  $M\Delta N$  induz ou um ciclo ou um caminho de comprimento 2 em  $G$ . Nesse mesmo artigo, os autores caracterizaram os grafos  $G$  tais que  $\mathcal{M}_{ax}^2(G)$  é uma árvore, um ciclo ou um grafo completo, e mostraram que, para todo grafo  $H$ , existe um grafo  $G$  tal que  $\mathcal{M}_{ax}^2(G) = H$ .

Nesta tese, consideramos o esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  de um grafo  $G$  qualquer e obtemos propriedades para este grafo. No Capítulo 2, introduzimos alguns conceitos básicos e resultados clássicos sobre grafos, politopos e politopos de emparelhamentos, e apresentamos alguns resultados sobre o esqueleto do politopo acíclico de Birkhoff. No Capítulo 3, apresentamos resultados iniciais de nossa pesquisa, estudando os graus de vértices de esqueletos  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  para classes específicas de grafos  $G$ . Este capítulo foi importante para motivar nossos estudos em classes mais abrangentes. De fato, no Capítulo 4, apresentamos uma generalização de resultados conhecidos somente para esqueletos de politopos acíclicos de Birkhoff (ou seja, voltados para árvores). Neste, estudamos o grau de um vértice de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ , quando  $G$  é um grafo qualquer, e dividimos os resultados obtidos em duas partes. Na primeira, mostramos como determinar o grau de um vértice qualquer de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ . Na segunda, provamos que o grau mínimo do esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  é igual ao número de arestas de  $G$ , estabelecemos quais emparelhamentos de  $G$  possuem grau mínimo no esqueleto e, por fim, caracterizamos os grafos cujos esqueletos dos respectivos politopos de emparelhamentos são regulares. No Capítulo 5, apresentamos novos avanços relacionados ao cálculo do grau máximo de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ , determinando os graus máximos de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_n))$  e de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_n))$ . Ainda neste capítulo, damos dois limites inferiores para o grau máximo de um esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ , sendo o primeiro para um grafo  $G$  qualquer e o segundo para uma classe específica de grafos. No Capítulo 6, abordamos duas questões: (1) saber se um grafo  $H$  é ou não o esqueleto do politopo de emparelhamentos de algum grafo  $G$ ; (2) verificar em que condições, dados dois grafos  $G$  e  $G'$ , o isomorfismo entre seus esqueletos  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  e  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G'))$  implica no isomorfismo dos próprios grafos  $G$  e  $G'$ . Para a primeira questão, damos uma resposta parcial, encontrando alguns grafos que são e outros que não são esqueletos de politopos de emparelhamentos. Para grafos conexos, respondemos totalmente a segunda questão, mostrando que o isomorfismo entre  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  e  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G'))$  implica no isomorfismo de  $G$  e  $G'$ , desde que  $G$  e  $G'$  não sejam os grafos  $K_3$  e  $S_{1,3}$ . Por fim, no Capítulo 7, expomos as considerações finais e apresentamos algumas propostas para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Preliminares

Neste capítulo apresentamos conceitos, notações e resultados conhecidos sobre grafos e politopos que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Alguns resultados aqui apresentados são clássicos e outros mais recentes. Na Seção 2.4, encontra-se uma coletânea dos principais resultados obtidos para esqueletos de politopos de emparelhamentos de árvores. Em cada seção, são indicadas algumas referências em que esses conceitos e resultados podem ser encontrados.

### 2.1 Grafos

Nesta seção expomos algumas definições e resultados básicos da Teoria de Grafos, que podem ser encontrados em [18], [19], [20], [21] e [22].

Um *grafo*  $G$  consiste num par de conjuntos finitos  $V = V(G)$  e  $E = E(G)$ . O primeiro formado por  $n$  elementos, chamados de vértices, e o segundo por um conjunto de pares não ordenados  $\{u, v\}$  de vértices distintos, chamados de arestas. A cardinalidade do conjunto  $V$ , denotada por  $|V|$ , é a *ordem* do grafo  $G$ . Usualmente, denotamos a aresta  $\{u, v\}$  por  $e = uv$  e dizemos que os vértices  $u$  e  $v$  são *adjacentes* e *incidentes* à aresta  $e$ . Usamos a notação  $u \sim v$  para expressar que os vértices  $u$  e  $v$  distintos são adjacentes.

Caso  $|V| = 0$ , o grafo  $G = (\emptyset, \emptyset)$  é chamado de *grafo vazio* e abreviamos por  $G = \emptyset$ . Se  $|V| \neq 0$  e  $|E| = 0$ , o grafo é dito *grafo trivial*. Em nosso trabalho todos os grafos considerados são não vazios, a menos que esta hipótese se faça necessária.

O conjunto dos *vértices adjacentes* a um vértice  $u$  é indicado por  $N(u)$  e a cardinalidade de  $N(u)$  é o *grau* do vértice  $u$ , denotado por  $d_G(u)$  ou simplesmente por  $d(u)$ . O maior dentre os graus dos vértices de um grafo  $G$  é o *grau máximo* de  $G$ , denotado por  $\Delta$ ; o menor, denotado por  $\delta$ , é o *grau mínimo* do grafo. Caso seja necessário, utilizaremos as notações  $\Delta(G)$  e  $\delta(G)$  para indicar os graus máximo e mínimo do grafo  $G$ , respectivamente. Se  $d(u) = 0$ , dizemos que  $u$  é um *vértice isolado*. Se  $d(u) = 1$ ,  $u$  é um *vértice pendente* e a única aresta que nele incide será uma *aresta pendente*. Se  $u$  não é um vértice

pendente mas é adjacente a um vértice pendente, então  $u$  é chamado de *vértice quase pendente*. Se  $d(u) = |V| - 1$ ,  $u$  será dito vértice *dominante* ou *universal*.

Duas *arestas* distintas são *adjacentes* se incidem em um mesmo vértice; caso contrário, elas são *disjuntas*. O conjunto das *arestas adjacentes* a uma aresta  $e$  é indicado por  $I(e)$ .

Dizemos que um grafo  $H$  é um *subgrafo* de um grafo  $G$  se  $V(H) \subset V(G)$  e  $E(H) \subset E(G)$ . Se  $H$  é subgrafo de  $G$  e  $H \neq G$ , dizemos que  $H$  é um *subgrafo próprio* de  $G$ . Se  $V(H) = V(G)$ , então  $H$  é dito ser um *subgrafo gerador* de  $G$ . Dizemos que  $H$  é um *subgrafo induzido* de  $G$  se, dada uma aresta  $uv \in E(G)$  tal que  $u, v \in V(H)$ , então  $uv \in E(H)$ . Dado um subconjunto  $S \subset V(G)$ , o subgrafo induzido por  $S$ , denotado por  $G[S]$ , é aquele que possui  $S$  como conjunto de vértices e contém todas as arestas  $uv$  de  $G$  tais que  $u, v \in S$ . De modo similar, definimos o subgrafo  $H$  induzido por um subconjunto  $X \subset E(G)$ : este possui  $X$  como conjunto de arestas e contém todos os vértices de  $G$  que incidem em alguma aresta de  $X$ .

Definimos uma *cadeia* (de comprimento  $k \geq 1$ ) de um grafo  $G$  como sendo uma sequência  $u_1 \dots u_{k+1}$  de  $k + 1$  vértices consecutivamente adjacentes, ou seja, tais que  $u_i u_{i+1}$  seja uma aresta de  $G$ , para  $1 \leq i \leq k$ . Os vértices  $u_1$  e  $u_{k+1}$  são ditos, respectivamente, vértices *inicial* e *final* da cadeia. Se estes vértices coincidirem, dizemos que esta cadeia é *fechada*. Caso contrário, dizemos que a cadeia é *aberta*. Se a cadeia é formada por vértices distintos entre si, dizemos que esta é um *caminho*. Se a cadeia é fechada e os vértices desta, com exceção dos vértices inicial e final, são dois a dois distintos, dizemos que esta é um *ciclo*. No caso da cadeia ser um caminho (ou, um ciclo), iremos relacioná-la com o subgrafo de  $G$  formado pelos vértices  $u_i$  da cadeia e pelas arestas  $u_i u_{i+1}$  de  $G$ , o qual chamaremos por *caminho* (*ciclo*) *de comprimento*  $k$  e será denotado por  $P_{k+1}$  ( $C_k$ ). Um ciclo  $C_k$  de comprimento par (ímpar) será chamado de *ciclo par* (*ciclo ímpar*). Eventualmente, denotaremos o caminho  $P_{k+1}$  (ciclo  $C_k$ ) pela sequência de arestas  $e_1 e_2 \dots e_k$ , onde  $e_i = u_i u_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq k$  (ou,  $1 \leq i \leq k - 1$ , no caso do ciclo). Um grafo sem ciclos é dito *acíclico* ou *floresta*.

Um grafo é dito *conexo* quando dois vértices distintos quaisquer  $u$  e  $v$  são vértices inicial e final de um caminho do grafo. Caso contrário, o grafo é *desconexo*. Um grafo conexo e acíclico é chamado de *árvore* e satisfaz  $|E| = |V| - 1$ . Uma *subárvore* de um grafo  $G$  é um subgrafo de  $G$  que é uma árvore. Uma árvore com  $n + 1$  vértices,  $n \geq 0$ , e que possui um vértice dominante, dito *vértice central*, é uma *estrela*, denotada por  $S_{1,n}$ . Um *caterpillar* é uma árvore tal que, se removermos todos os vértices pendentes, obtemos um caminho com pelo menos dois vértices, chamado de *espinha do caterpillar*. Para  $k \geq 2$ ,  $q_1 \geq 1$ ,  $q_i \geq 0$ ,  $1 \leq i \leq k$  e  $q_k \geq 1$ , o *caterpillar*  $T(q_1, \dots, q_k)$  é aquele obtido por um caminho  $P_k$ , identificando-se o  $i$ -ésimo vértice de  $P_k$  com o vértice central da estrela  $S_{1,q_i}$ . A ordem do caterpillar é  $n = q_1 + \dots + q_k + k$ .

Um grafo conexo com um único ciclo é chamado de *unicíclico* e é tal que  $|E| = |V|$ .

Um grafo com  $n$  vértices em que todo vértice é dominante é dito *completo* e denotado por  $K_n$ . Um grafo é *k-regular* ou *regular de grau k* ( $0 \leq k \leq n - 1$ ), se o grau de todos os seus vértices for  $k$ ; é *birregular* de graus  $r$  e  $s$  distintos, se seus vértices possuem somente graus  $r$  ou  $s$ . Os grafos  $K_n$  e  $C_n$  são regulares de graus  $n - 1$  e  $2$ , respectivamente. O *complementar*  $\overline{G}$  de um grafo  $G$  é aquele com os mesmos vértices de  $G$ , tal que  $uv$  é uma aresta de  $\overline{G}$  se, e somente se,  $uv$  não é aresta de  $G$ .

Num grafo conexo, a *distância* entre dois vértices  $u$  e  $v$ ,  $d(u, v)$ , é o comprimento do menor caminho do grafo tendo  $u$  como vértice inicial e  $v$  como vértice final do caminho. O *diâmetro* de um grafo  $G$ ,  $diam(G)$ , é a maior distância entre dois vértices do grafo. Deste modo, um grafo conexo possui diâmetro 1 se, e somente se, for um grafo completo com pelo menos dois vértices. E uma árvore possui diâmetro 2 se, e somente se, for uma estrela com pelo menos três vértices.

Um grafo  $G$  é *hamiltoniano* se possui um ciclo que contenha todos os seus vértices, e é *euleriano* se possui um ciclo que contenha todas as suas arestas. O teorema a seguir caracteriza os grafos conexos eulerianos.

**Teorema 2.1.** ([22]) *Um grafo conexo  $G$  é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices possuem grau par.*

Um grafo é *k-partido* quando seu conjunto  $V$  de vértices pode ser particionado em  $k$  conjuntos disjuntos não vazios, chamados de classes, de modo que não existam adjacências entre quaisquer dois vértices de uma mesma classe. Um grafo *k-partido* é dito *completo* quando cada vértice de uma classe  $V_i$  é adjacente a todos os demais vértices de  $V \setminus V_i$ . Se  $k = 2$ , dizemos que o grafo é *bipartido*. Um grafo  $G$ , com pelo menos 2 vértices, é bipartido se, e somente se,  $G$  não possui ciclo de comprimento ímpar.

O *n-cubo* é o grafo  $Q_n$  cujos vértices são rotulados por todas  $n$ -uplas ordenadas de 1's e 0's, e dois vértices são adjacentes se seus rótulos diferem por uma única coordenada.

Um grafo é *planar* se pode ser ilustrado no plano de modo que as arestas se encontrem somente em pontos que representam os vértices. Informalmente,  $G$  é planar se puder ser desenhado no plano sem cruzamento de arestas fora dos vértices.

Seja  $H = (W, F)$  um grafo. Suponhamos que  $uw \in F$  e  $v \notin W$ . Seja  $G = (V, E)$ , onde  $V = W \cup \{v\}$  e  $E = (F \setminus \{uw\}) \cup \{uv, vw\}$ , ou seja, o conjunto  $E$  é obtido de  $F$  substituindo-se a aresta  $uw$  por duas novas arestas,  $uv$  e  $vw$ . Neste caso,  $G$  é dito ser obtido de  $H$  por *subdivisão de aresta*. Uma subdivisão de  $H$  é um grafo obtido de  $H$  por sucessivas subdivisões de arestas. Dois grafos  $G$  e  $G'$  são ditos *homeomorfos* se um deles é uma subdivisão do outro. O *Teorema de Kuratowski*, enunciado a seguir, caracteriza os grafos planares por subgrafos proibidos, homeomorfos a  $K_5$  ou a  $K_{3,3}$ .

**Teorema 2.2.** ([22]) *Um grafo é planar se, e somente se, não possui subgrafo homeomorfo a  $K_5$  ou a  $K_{3,3}$ .*

Dois grafos  $G_1$  e  $G_2$  são *isomorfos* se existe uma correspondência biunívoca entre seus conjuntos de vértices de modo que as adjacências sejam preservadas. Neste caso, a bijeção é chamada de *isomorfismo*. Se  $G_1$  e  $G_2$  são isomorfos, escrevemos simplesmente  $G_1 = G_2$ .

Quando um grafo  $G$  não possui ciclos de comprimento 3, diz-se que  $G$  é livre de triângulos. Além disso, é comum se referir ao ciclo  $C_3$ , que é isomorfo ao grafo completo  $K_3$ , como triângulo.

Sejam  $G = (V, E)$  e  $H = (W, F)$  dois grafos tais que  $V \cap W = \emptyset$ . O *join* de  $G$  com  $H$ ,  $G \vee H$ , é o grafo que satisfaz  $V(G \vee H) = V \cup W$  e  $E(G \vee H) = E \cup F \cup \{vw : v \in V \text{ e } w \in W\}$ . A *união* de  $G$  com  $H$  é o grafo  $G \cup H$  cujo conjunto de vértices é  $V \cup W$  e o conjunto de arestas é  $E \cup F$ . A união pode ser estendida para um número finito  $k > 2$  de grafos que possuam conjuntos de vértices dois a dois disjuntos. Quando estes são isomorfos a um mesmo grafo  $G$ , dizemos que são  $k$  cópias de  $G$  e sua união é indicada por  $kG$ . O *grafo linha* de  $G$ ,  $\mathcal{L}(G)$ , é aquele que tem  $E(G)$  como conjunto de vértices e dois vértices de  $\mathcal{L}(G)$  são adjacentes se, e somente se, são adjacentes as arestas de  $G$  que lhes deram origem. Dizemos que um grafo  $H$  é um *grafo linha* se existir um grafo  $G$  tal que  $H$  seja o grafo linha de  $G$ . O teorema a seguir caracteriza os grafos linha através de subgrafos induzidos proibidos.

**Teorema 2.3.** ([22]) *Um grafo  $H$  é grafo linha se, e somente se, nenhum dos grafos da Figura 2.1 é subgrafo induzido de  $H$ .*

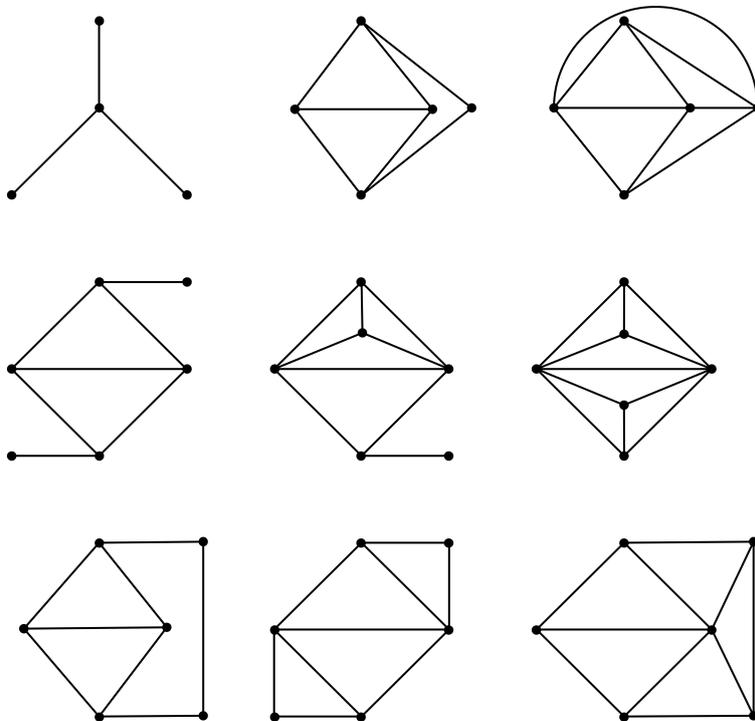


Figura 2.1: Subgrafos proibidos para  $H$  ser um grafo linha

A seguir enunciamos o *Teorema de Whitney*, que garante que  $K_3$  e  $S_{1,3}$  são os únicos grafos conexos não isomorfos com grafos linha isomorfos.

**Teorema 2.4.** ([23]) *Sejam  $G$  e  $G'$  grafos conexos. Se  $\mathcal{L}(G)$  e  $\mathcal{L}(G')$  são isomorfos, então  $G$  e  $G'$  são isomorfos, a exceção dos grafos  $K_3$  e  $S_{1,3}$ .*

Um *emparelhamento* de um grafo é um conjunto de arestas duas a duas não adjacentes. O emparelhamento sem arestas é o emparelhamento *vazio*, denotado por  $\emptyset$ . Notemos que todo grafo com pelo menos uma aresta possui pelo menos um emparelhamento não vazio. Um emparelhamento formado por uma única aresta é chamado de emparelhamento *unitário*. Dado um emparelhamento  $M$  do grafo, dizemos que um vértice  $v \in V$  é  *$M$ -saturado* se alguma aresta de  $M$  incide em  $v$ ; caso contrário, dizemos que  $v$  é  *$M$ -insaturado*. Se todo vértice do grafo for  $M$ -saturado, o emparelhamento  $M$  é dito *perfeito*. Se o grafo possui um único vértice insaturado,  $M$  é dito ser *quase perfeito*. Dizemos que um emparelhamento é *maximal* se não existir um outro emparelhamento que o contenha, e é *máximo* se, dentre todos os emparelhamentos do grafo, possuir o maior número de arestas. O *número de emparelhamento* de um grafo  $G$ , denotado por  $\nu = \nu(G)$ , é o número de arestas de um emparelhamento máximo.

Seja  $M$  um emparelhamento de um grafo  $G$ . Um caminho  $P$  do grafo é um *caminho  $M$ -alternado* se, para quaisquer duas arestas adjacentes de  $P$ , uma pertence a  $M$  e a outra não. Observamos que as arestas de tal caminho  $P$  que não pertencem a  $M$  irão necessariamente pertencer a um emparelhamento  $M'$  do grafo que é disjunto de  $M$ . Assim, também dizemos que  $P$  é *alternado com relação a  $M$  e  $M'$* . Um *ciclo alternado* é definido similarmente.

Seja  $G = (V, E)$  um grafo de ordem  $n$ . A *matriz de adjacência*  $A(G)$  de  $G$  é a matriz quadrada de ordem  $n$  cujas entradas são

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i v_j \in E, \text{ para } v_i, v_j \in V; \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Sendo  $A(G)$  uma matriz real e simétrica, todos os seus autovalores são reais. O *polinômio característico* da matriz de adjacência  $A(G)$  de um grafo  $G$  é denominado polinômio característico de  $G$ . As raízes deste são chamadas de autovalores de  $G$ . Sejam  $\lambda_1 > \dots > \lambda_s$  os autovalores distintos de  $G$ , com multiplicidades algébricas iguais a  $m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_s)$ , respectivamente. O *espectro do grafo*  $G$ , denotado por  $\text{spect}(G)$ , é definido como a matriz  $2 \times s$ , onde a primeira linha é constituída pelos  $s$  autovalores distintos de  $G$ , dispostos em ordem decrescente, e a segunda pelas suas respectivas multiplicidades algébricas. Ou seja,

$$\text{spect}(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_s \\ m(\lambda_1) & \dots & m(\lambda_s) \end{bmatrix}.$$

## 2.2 Politopos

Nesta seção revisamos o conceito de politopo e apresentamos alguns resultados conhecidos da literatura. Como referências, citamos [1], [3], [4], [24], [25] e [26].

Uma *inequação linear* é uma inequação da forma  $a^T x \leq \beta$ , onde  $a \in \mathbb{R}^n$  é não nulo,  $\beta \in \mathbb{R}$  e a variável  $x \in \mathbb{R}^n$ . Um *sistema linear* é um conjunto de inequações lineares, que pode ser escrito na forma matricial como  $Ax \leq b$ , onde  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  é uma matriz não nula,  $b \in \mathbb{R}^m$  e a variável  $x \in \mathbb{R}^n$ . Um subconjunto  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$  é um *poliedro* se  $\mathcal{P}$  é o conjunto solução de um sistema linear.

O *fecho convexo* de um subconjunto não-vazio  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\text{conv}(A)$ , é o conjunto de todos os pontos que podem ser representados como combinação linear convexa de pontos de  $A$ , ou seja,

$$\text{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i x_i; k \in \mathbb{N}, x_i \in A, 0 \leq a_i \in \mathbb{R}, \text{ para } 1 \leq i \leq k, \text{ e } \sum_{i=1}^k a_i = 1 \right\}.$$

Caso  $A$  seja finito, digamos,  $A = \{x_1, \dots, x_r\}$ , seu fecho convexo é denotado por  $\text{conv}\{x_1, \dots, x_r\}$ .

Um subconjunto  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$  é chamado de *politopo* se  $\mathcal{P}$  é o fecho convexo de um conjunto finito de pontos em  $\mathbb{R}^n$ , ou seja,  $\mathcal{P} = \text{conv}\{x_1, \dots, x_r\}$ , para certos  $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$ . Portanto,

$$\mathcal{P} = \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i; 0 \leq \alpha_i \in \mathbb{R}, \text{ para } 1 \leq i \leq r, \text{ e } \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1 \right\}.$$

**Exemplo 2.5.** Um triângulo é um politopo em  $\mathbb{R}^2$ , o tetraedro e o cubo são politopos em  $\mathbb{R}^3$ . O politopo  $\mathcal{P}$  da Figura 2.12 é o fecho convexo tanto para  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ , quanto para  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ .

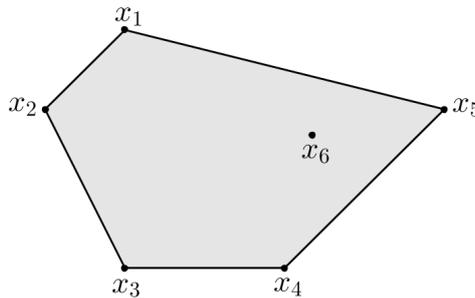


Figura 2.2: Politopo  $\mathcal{P}$

O resultado a seguir garante que todo politopo é um poliedro limitado, valendo a recíproca. Assim, um politopo é o conjunto solução de um sistema linear.

**Proposição 2.6.** ([1]) Um subconjunto  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$  é um politopo se, e somente se,  $\mathcal{P}$  é um poliedro limitado.

A *dimensão de um conjunto* não vazio  $S \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\dim(S)$ , é a dimensão do menor subespaço afim que contém  $S$ , isto é,  $\dim(S) = \min\{\dim(A) : S \subset A, A \text{ subespaço afim de } \mathbb{R}^n\}$ . Por exemplo, em  $\mathbb{R}^n$ , a dimensão de um ponto é zero e a dimensão de um segmento de reta é um.

Uma *face*  $\mathcal{F}$  de um poliedro  $\mathcal{P}$ , contido em  $\mathbb{R}^n$ , é um subconjunto de  $\mathcal{P}$  que ou é  $\emptyset$ , ou é o próprio  $\mathcal{P}$ , ou é a interseção de um hiperplano do  $\mathbb{R}^n$  com o poliedro, de modo que o poliedro esteja contido em um dos subespaços determinados por este hiperplano. Neste último caso, existe um vetor  $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e um número real  $\alpha$  tais que

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathcal{P} : c^T x = \alpha\} \quad \text{e} \quad c^T x \leq \alpha, \quad \forall x \in \mathcal{P}.$$

Uma face  $\mathcal{F}$  de um politopo  $\mathcal{P}$  é também um politopo e as faces de  $\mathcal{F}$  são também faces de  $\mathcal{P}$ . Se  $\mathcal{P}$  é um politopo, os *vértices* de  $\mathcal{P}$  são as faces de dimensão 0. As faces de dimensão 1 são chamadas de *arestas* de  $\mathcal{P}$  e uma aresta necessariamente conecta dois vértices de  $\mathcal{P}$ . Um politopo  $\mathcal{P}$  é o fecho convexo dos seus vértices. Dizemos que dois vértices de  $\mathcal{P}$  são adjacentes se são conectados por uma aresta. Um politopo  $\mathcal{P}$  é dito ser um *(0,1)-politopo* se todos os seus vértices possuem coordenadas iguais a 0 ou 1.

**Exemplo 2.7.** Seja  $C$  o cubo unitário em  $\mathbb{R}^3$ , ou seja,  $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}$ . Este possui 8 faces de dimensão zero, constituídas pelos vetores  $(x_1, x_2, x_3)$  tais que  $x_i \in \{0, 1\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ; 12 faces de dimensão um e 6 faces de dimensão dois. Na Figura 2.3 destacamos algumas faces de  $C$ .

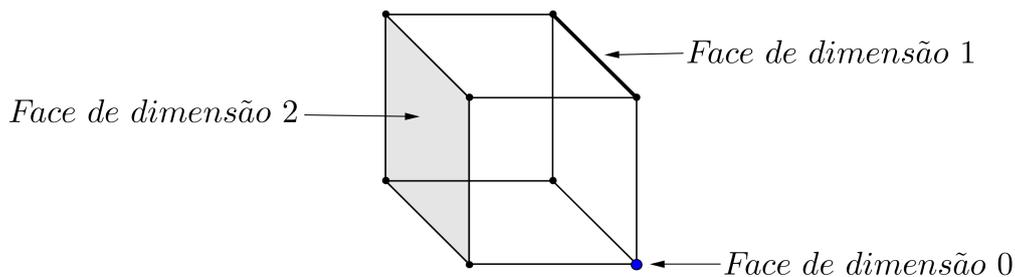


Figura 2.3: Cubo  $C$

Uma matriz quadrada não negativa  $P = [p_{ij}]$  de ordem  $n$  é uma *matriz duplamente estocástica* se,

$$\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1, \quad \text{para } j = 1, \dots, n, \quad \text{e}$$

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1 \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

**Exemplo 2.8.** As matrizes abaixo são duplamente estocásticas. A primeira, em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , e as demais em  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ :

$$P = \begin{bmatrix} 1/n & \cdots & 1/n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/n & \cdots & 1/n \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

O conjunto das matrizes duplamente estocásticas de ordem  $n$  é denotado por  $\Omega_n$  e pode ser visto como um politopo em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , chamado de *politopo de Birkhoff*. Sua dimensão é  $(n-1)^2$  e seus vértices são as *matrizes de permutação* de ordem  $n$ .

**Exemplo 2.9.** Se  $n = 2$ , o politopo de Birkhoff é dado por

$$\Omega_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1-r & r \\ r & 1-r \end{bmatrix} : 0 \leq r \leq 1 \right\}.$$

Notemos que  $\Omega_2$  é um politopo de dimensão 1 em  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  com apenas 2 vértices.

**Exemplo 2.10.** Para  $n = 3$ ,  $\Omega_3$  é o conjunto de todas as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1-p-q & p & q \\ r & 1-r-s & s \\ t & u & 1-t-u \end{bmatrix}$$

tais que  $0 \leq p, q, r, s, t, u \leq 1$ ;  $p+q = r+t$ ;  $r+s = p+u$ ;  $t+u = q+s$ ;  $p+q \leq 1$ ;  $r+s \leq 1$  e  $t+u \leq 1$ . Portanto,  $\Omega_3$  é um politopo de dimensão 4 em  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  que possui seis vértices.

Uma matriz quadrada  $A = [a_{ij}]$  é *tridiagonal* se  $a_{ij} = 0$ , sempre que  $|j-i| \geq 2$ . O subconjunto de  $\Omega_n$  formado por todas as matrizes tridiagonais é uma face de  $\Omega_n$ . Como uma face de um politopo é também um politopo, este é chamado de *politopo de Birkhoff tridiagonal* e denotado por  $\Omega_n^t$ . Assim,  $\Omega_n^t = \{A \in \Omega_n : A \text{ é tridiagonal}\}$ . A dimensão deste politopo é  $n-1$  e seus vértices são as matrizes de permutação de ordem  $n$  que são tridiagonais. No exemplo que segue, apresentamos  $\Omega_4^t$ .

**Exemplo 2.11.** Para  $n = 4$ ,  $\Omega_4^t$  é o conjunto de todas as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ p & 1-p-s & s & 0 \\ 0 & s & 1-s-q & q \\ 0 & 0 & q & 1-q \end{bmatrix}$$

tais que  $0 \leq p, q, s \leq 1$ ,  $p+s \leq 1$ ,  $s+q \leq 1$ . Assim,  $\Omega_4^t$  é uma face de  $\Omega_4$  que possui cinco vértices.

Seja  $\mathcal{P}$  um politopo. O  $1$ -esqueleto ou, simplesmente, *esqueleto* de  $\mathcal{P}$ , denotado por  $\mathcal{G}(\mathcal{P})$ , é o grafo cujos vértices e arestas são, respectivamente, os vértices e as arestas de  $\mathcal{P}$ . O grafo  $\mathcal{G}(\mathcal{P})$  é sempre conexo (veja [26]). Notemos que podemos ver o politopo  $\mathcal{P}$  como sendo o fecho convexo de seu esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{P})$ .

Um grafo é dito ser  $d$ -politopal se ele é o esqueleto de um politopo de dimensão  $d$ . O teorema a seguir afirma que um grafo  $d$ -politopal contém um subgrafo homeomorfo ao grafo completo  $K_{d+1}$ .

**Teorema 2.12.** ([27]) *Todo grafo  $d$ -politopal contém uma subdivisão de  $K_{d+1}$ .*

**Exemplo 2.13.** *O cubo unitário  $C$  tem dimensão 3 e, portanto, o seu esqueleto  $\mathcal{G}(C) = Q_3$  é 3-politopal. Do Teorema 2.12,  $Q_3$  contém uma subdivisão de  $K_4$ . Na Figura 2.4 temos o grafo completo  $K_4$  e um grafo isomorfo a  $Q_3$ . Se  $v_1, v_2, v_3$  e  $v_4$  são os vértices de  $K_4$ ,  $Q_3$  contém uma subdivisão deste grafo, fazendo-se as seguintes substituições:*

- (i)  $v_2v_3$  por  $v_2u_1$  e  $u_1v_3$ ;
- (ii)  $v_2v_4$  por  $v_2u_2$  e  $u_2v_4$ ;
- (iii)  $v_3v_4$  por  $v_3u_3$  e  $u_3v_4$ .

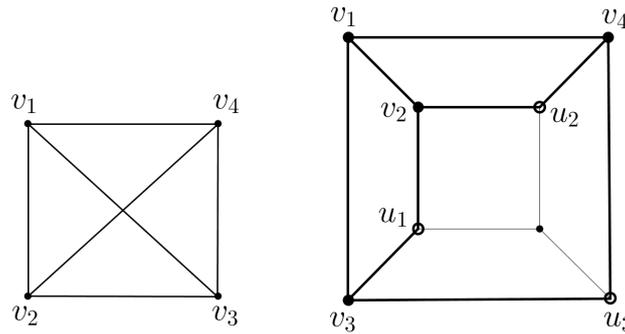


Figura 2.4:  $K_4$  e  $\mathcal{G}(C) = Q_3$

## 2.3 Politopos de emparelhamentos

Esta seção é dedicada a uma classe específica de politopos, obtidos a partir de emparelhamentos de um grafo. Apresentamos conceitos e resultados clássicos sobre politopos de emparelhamentos e politopos de emparelhamentos perfeitos, que podem ser encontrados em [2], [28], [29], [30], [31] e [32].

Seja  $G$  um grafo tal que  $|E| = m$ . O espaço vetorial  $\mathbb{R}^E$  das funções de  $E$  em  $\mathbb{R}$  tem dimensão  $m$ . Uma vez estabelecida uma ordenação  $e_1, e_2, \dots, e_m$  no conjunto  $E$ , cada vetor  $f$  de  $\mathbb{R}^E$  está unicamente associado ao vetor  $v = (f(e_1), \dots, f(e_m))$  de  $\mathbb{R}^m$ . Deste modo, não faremos distinção entre  $f$  e  $v$ .

Dado um subconjunto  $F$  de  $E$ , definimos o *vetor de incidência*  $\chi_F$  de  $F$  por

$$\chi_F(e) = \begin{cases} 1, & \text{se } e \in F; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como  $\chi_F$  é unicamente determinado por  $F$ , caso não seja conflitante, não faremos distinção entre  $\chi_F$  e  $F$ . Notemos que  $\mathbb{R}^E$  possui o vetor nulo, que é o vetor de incidência do emparelhamento vazio, assim como o vetor  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ , que é o vetor de incidência de  $E$ . Ainda, para  $1 \leq i \leq m$ , o vetor de incidência da  $i$ -ésima aresta  $e_i$  de  $E$  é o  $i$ -ésimo vetor canônico do  $\mathbb{R}^m$ .

**Definição 2.14.** Dado um grafo  $G$ , o *politopo de emparelhamentos* de  $G$ , denotado por  $\mathcal{M}(G)$ , é o fecho convexo dos vetores de incidência de emparelhamentos de  $G$ .

Os vértices de  $\mathcal{M}(G)$  são os vetores de incidência  $\chi_M$ , onde  $M$  é um emparelhamento do grafo  $G$ . Assim, tanto o vetor nulo quanto os vetores canônicos de  $\mathbb{R}^m$  são vértices de  $\mathcal{M}(G)$  e, portanto, se  $G$  possui  $m$  arestas, sua dimensão é  $\dim(\mathcal{M}(G)) = \dim(\mathbb{R}^m) = m$ .

**Exemplo 2.15.** No grafo  $K_3$ , de arestas  $e_1, e_2, e_3$ , há somente os emparelhamentos  $\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}$  e  $\{e_3\}$ . Portanto,  $\mathcal{M}(K_3) = \text{conv}\{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ , ou seja, um tetraedro em  $\mathbb{R}^3$ , e  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_3)) = K_4$  (veja a Figura 2.5).

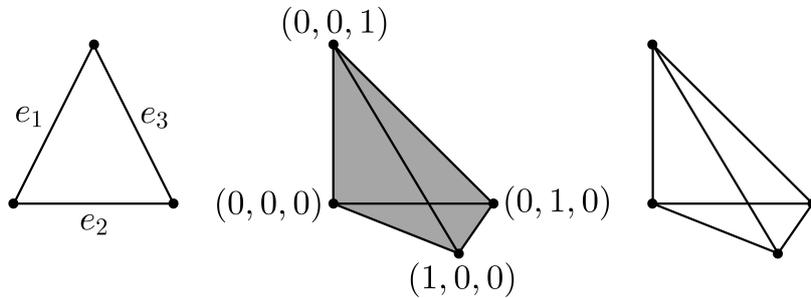


Figura 2.5:  $K_3$ ,  $\mathcal{M}(K_3)$  e  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_3)) = K_4$

A classe dos politopos de emparelhamentos contém uma subclasse de politopos, chamados de politopos de emparelhamentos perfeitos.

**Definição 2.16.** Dado um grafo  $G$ , o *politopo de emparelhamentos perfeitos* de  $G$ , denotado por  $\mathcal{PM}(G)$ , é o fecho convexo dos vetores de incidência de emparelhamentos perfeitos de  $G$ .

Notemos que nem sempre existe um emparelhamento perfeito em um grafo. Por exemplo,  $\mathcal{PM}(K_3) = \emptyset$ , pois o grafo  $K_3$  não possui emparelhamento perfeito.

Muitas vezes, ao nos referirmos ao esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  (respectivamente,  $\mathcal{G}(\mathcal{PM}(G))$ ), diremos que dois emparelhamentos  $M$  e  $N$  são vértices adjacentes (ou,

simplesmente, são adjacentes) em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  (respectivamente,  $\mathcal{G}(\mathcal{PM}(G))$ ), ao invés de dizer que  $\chi_M$  e  $\chi_N$  são vértices adjacentes deste grafo.

O grau de um emparelhamento  $M$ , denotado por  $d(M)$ , é o grau do vértice correspondente a  $M$  no grafo  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  (respectivamente,  $\mathcal{G}(\mathcal{PM}(G))$ ).

Sendo um politopo um poliedro, este pode ser determinado por um sistema linear. Considerando, primeiramente, os politopos de emparelhamentos perfeitos, apresentamos condições, dadas por equações ou inequações lineares, que caracterizam tais politopos.

Seja  $G$  um grafo possuindo um emparelhamento perfeito  $M$ . Então,  $\chi_M$  é um vetor não negativo do  $\mathbb{R}^m$  e, para cada vértice  $v$  do grafo, há exatamente uma aresta  $e$  de  $M$  que incide em  $v$ . Mais precisamente,  $\chi_M$  possui somente coordenadas 0's ou 1's e  $\sum_{u \in N(v)} \chi_M(uv) = 1$ . Como  $\mathcal{PM}(G)$  é o fecho convexo de tais emparelhamentos, cada vetor  $x$  de  $\mathcal{PM}(G)$  satisfaz:

$$\begin{aligned} (i) \quad & x(e) \geq 0, \text{ para cada aresta } e \in E(G); \\ (ii) \quad & \sum_{u \in N(v)} x(uv) = 1, \text{ para cada vértice } v \in V(G). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Estas condições não são suficientes para determinar o politopo de emparelhamentos perfeitos de um grafo  $G$  qualquer. Por exemplo, para  $G = K_3$ , tem-se  $\mathcal{PM}(G) = \emptyset$ , mas  $(1/2, 1/2, 1/2)$  satisfaz (2.1). No entanto, as condições (2.1) são suficientes para determinar o politopo de emparelhamentos perfeitos de grafos bipartidos, como afirma o seguinte resultado.

**Teorema 2.17.** ([2]) *Se  $G$  é um grafo bipartido, então  $\mathcal{PM}(G)$  é determinado por (2.1).*

A recíproca deste teorema não é válida, como mostra o exemplo a seguir.

**Exemplo 2.18.** *Seja  $G$  o grafo não bipartido apresentado na Figura 2.6, cujo único emparelhamento perfeito é  $M = \{e_1, e_3\}$ . O politopo de emparelhamentos perfeitos de  $G$  é  $\mathcal{PM}(G) = \{(1, 0, 1, 0)\}$ , que corresponde exatamente à solução do sistema (2.1) para  $G$ .*

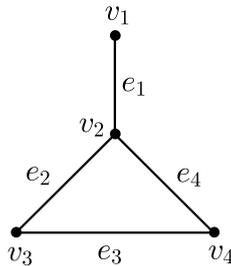


Figura 2.6: Grafo não bipartido com emparelhamento perfeito

Dado um grafo  $G$ , o politopo  $\mathcal{M}(G)$  é o fecho convexo de seus emparelhamentos. Por raciocínio similar ao anterior, vemos que um vetor  $x$  de  $\mathcal{M}(G)$  satisfaz ao sistema linear:

$$\begin{aligned} (i) \quad & x(e) \geq 0, \text{ para cada aresta } e \in E(G); \\ (ii) \quad & \sum_{u \in N(v)} x(uv) \leq 1, \text{ para cada vértice } v \in V(G). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Observamos que 2.2 é um relaxamento, na segunda condição, do sistema linear 2.1.

Assim como ocorreu com o politopo  $\mathcal{PM}(G)$ , temos que estas condições não são suficientes para caracterizar o politopo  $\mathcal{M}(G)$ , em geral. A seguir damos um exemplo deste fato. No entanto, o Teorema 2.20 garante que o sistema linear 2.2 é suficiente para determinar o politopo de emparelhamentos de um grafo bipartido.

**Exemplo 2.19.** Consideremos o grafo completo  $K_3$ . O politopo de emparelhamentos  $\mathcal{M}(K_3)$  é o fecho convexo de  $\{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ , de modo que o ponto  $S = (1/2, 1/2, 1/2)$  não pertence a este politopo (veja a Figura 2.7). Entretanto, observamos que este ponto satisfaz (2.2).

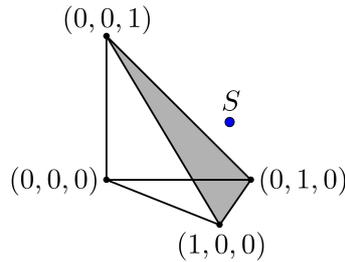


Figura 2.7:  $S = (1/2, 1/2, 1/2) \notin \mathcal{M}(K_3)$

**Teorema 2.20.** ([2]) O politopo de emparelhamentos de um grafo  $G$  é determinado por (2.2) se, e somente se,  $G$  é um grafo bipartido.

**Exemplo 2.21.** Para o caminho  $P_3$  da Figura 2.8, as condições (2.2) são

$$\begin{cases} x_1, x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 1, \end{cases}$$

ou seja,  $\mathcal{M}(P_3) \subset \mathbb{R}^2$  é o triângulo cujos vértices são dados por  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  e  $(0,1)$ .

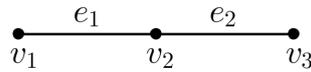


Figura 2.8: Caminho  $P_3$

Para grafos não bipartidos, a caracterização do politopo de emparelhamentos perfeitos foi dada por Edmonds [32], como segue.

Dado um grafo  $G$ , consideremos o seguinte conjunto de inequações lineares em  $\mathbb{R}^E$ :

$$\begin{aligned} (i) & \quad x(e) \geq 0, \text{ para cada aresta } e; \\ (ii) & \quad \sum_{u \in N(v)} x(uv) = 1, \text{ para cada vértice } v; \\ (iii) & \quad \sum_{e \in E(S, \bar{S})} x(e) \geq 1, \text{ para todo } S \subset V \text{ tal que } |S| \text{ é ímpar,} \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde  $E(S, \bar{S})$  denota o conjunto de arestas de  $G$  que incidem em exatamente um vértice de  $S$ .

Para qualquer emparelhamento perfeito  $M$ , o vetor de incidência  $\chi_M$  satisfaz (2.3). Portanto,  $\mathcal{PM}(G)$  está contido no politopo determinado por (2.3). A essência do teorema de Edmonds está em verificar a inclusão contrária.

**Teorema 2.22.** ([32]) *O politopo de emparelhamentos perfeitos de qualquer grafo  $G$  é determinado por (2.3).*

É devida também a Edmonds [32] a caracterização do politopo de emparelhamentos de um grafo  $G$  qualquer.

Dado um grafo  $G$ , consideremos o seguinte conjunto de inequações lineares:

$$\begin{aligned} (i) \quad & x(e) \geq 0, \text{ para cada aresta } e; \\ (ii) \quad & \sum_{u \in N(v)} x(uv) \leq 1, \text{ para cada vértice } v; \\ (iii) \quad & \sum_{e \in E(S)} x(e) \leq \lfloor \frac{1}{2}|S| \rfloor, \text{ para todo } S \subset V \text{ tal que } |S| \text{ é ímpar,} \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde  $E(S)$  é o conjunto de arestas de  $G$  que incidem somente em vértices de  $S$ .

**Teorema 2.23.** ([32]) *O politopo de emparelhamentos de qualquer grafo  $G$  é determinado por (2.4).*

A diferença simétrica entre dois conjuntos  $A$  e  $B$ , denotada por  $A\Delta B$ , é o conjunto

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

No presente trabalho, caso  $A$  e  $B$  sejam ambos subconjuntos de arestas de um grafo  $G$ , iremos nos referir à diferença simétrica  $A\Delta B$  como sendo o subgrafo de  $G$  induzido por  $A\Delta B$ . Ainda, dado um subgrafo  $H$  de  $G$  e um subconjunto  $B$  de  $E(G)$ , escrevemos  $H\Delta B$  ao invés de  $E(H)\Delta B$ .

O teorema a seguir é um conhecido resultado da teoria de emparelhamentos.

**Teorema 2.24.** ([30]) *Sejam  $M, N$  dois emparelhamentos de um grafo  $G$ . Então, a diferença simétrica  $M\Delta N$  é uma união disjunta (com relação aos vértices) de caminhos alternados e ciclos alternados.*

**Exemplo 2.25.** *Seja  $G$  o grafo dado na Figura 2.9 e consideremos os emparelhamentos  $M = \{e_1, e_3, e_6, e_8, e_{12}, e_{14}\}$  e  $N = \{e_2, e_4, e_7, e_9, e_{11}, e_{15}\}$  de  $G$ . Neste caso,  $M\Delta N$  é formado por dois ciclos,  $C = e_1e_2e_3e_4$  e  $C' = e_6e_7e_8e_9$ , e por dois caminhos,  $P = e_{11}e_{12}$  e  $P' = e_{14}e_{15}$ .*

Os próximos resultados determinam condições para que dois emparelhamentos sejam adjacentes nos politopos  $\mathcal{PM}(G)$  e  $\mathcal{M}(G)$ . Tais resultados são de grande interesse, uma vez que determinam quando dois vértices são adjacentes nos grafos  $\mathcal{G}(\mathcal{PM}(G))$  e  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ .

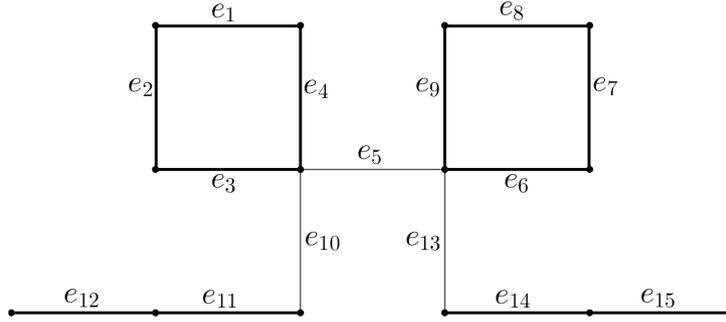


Figura 2.9:  $M\Delta N$  é união disjunta de caminhos e ciclos

**Teorema 2.26.** ([2]) *Sejam  $M, N$  emparelhamentos perfeitos distintos em um grafo  $G$ . Então,  $M$  e  $N$  são vértices adjacentes em  $\mathcal{PM}(G)$  se, e somente se,  $M\Delta N$  é um ciclo.*

**Teorema 2.27.** ([2]) *Sejam  $M, N$  emparelhamentos distintos em um grafo  $G$ . Então,  $M$  e  $N$  são vértices adjacentes em  $\mathcal{M}(G)$  se, e somente se,  $M\Delta N$  é um caminho ou um ciclo.*

Em ambos os casos, para que os emparelhamentos  $M$  e  $N$  sejam adjacentes, é necessário que  $M\Delta N$  seja um subgrafo conexo de  $G$ . O próximo teorema garante que, no caso do politopo  $\mathcal{M}(G)$ , esta condição também é suficiente.

**Teorema 2.28.** ([31]) *Dois emparelhamentos distintos  $M$  e  $N$  de um grafo  $G$  são adjacentes no politopo de emparelhamentos se, e somente se, a diferença simétrica  $M\Delta N$  é um grafo conexo.*

Se a diferença simétrica  $M\Delta N$  de dois emparelhamentos de  $G$  é um subgrafo conexo e não vazio de  $G$ , este terá grau máximo menor ou igual a 2. Portanto, será um ciclo (de comprimento par) ou um caminho. Logo, concluímos que o Teorema 2.28 é equivalente ao Teorema 2.27.

Dado um politopo  $\mathcal{P}$ , o seu esqueleto  $G(\mathcal{P})$  é um grafo conexo. Isto nos permite definir o *diâmetro* do politopo  $\mathcal{P}$  como sendo o diâmetro do esqueleto  $G(\mathcal{P})$ . No caso do politopo de emparelhamentos de um grafo  $G$ , o Teorema 2.30 garante que seu diâmetro é dado pelo número de emparelhamento de  $G$ . Para o politopo de emparelhamentos perfeitos, é conhecida uma cota superior para o diâmetro, dada em função da cardinalidade do conjunto de vértices de  $G$ , como mostra o teorema a seguir.

**Teorema 2.29.** ([2]) *O politopo de emparelhamentos perfeitos de um grafo  $G$  tem diâmetro no máximo  $\frac{1}{4}|V|$ .*

**Teorema 2.30.** ([2]) *O diâmetro do politopo de emparelhamentos de um grafo  $G$  é igual ao número de emparelhamento de  $G$ ,  $\nu(G)$ .*

## 2.4 Polítoto acíclico de Birkhoff

Nesta seção apresentamos alguns resultados relacionados ao polítoto acíclico de Birkhoff, cuja definição que segue foi introduzida em [5]. As principais referências aqui utilizadas são [5], [6] e [7].

**Definição 2.31.** *Seja  $T$  uma árvore com vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . O polítoto acíclico de Birkhoff,  $\Omega_n(T)$ , é o conjunto das matrizes duplamente estocásticas tais que, para cada matriz de  $\Omega_n(T)$ , uma entrada positiva está na diagonal principal ou em uma posição  $(i, j)$  que corresponde a uma aresta  $v_i v_j$  da árvore  $T$ .*

Notemos que, da definição acima, um vértice do polítoto acíclico de Birkhoff  $\Omega_n(T)$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Sendo  $\Omega_n(T)$  uma face do polítoto de Birkhoff  $\Omega_n$ , seus vértices serão matrizes de permutação cujas posições das entradas não nulas, que não estão na diagonal, correspondem às arestas da árvore  $T$ . As faces do polítoto acíclico de Birkhoff foram estudadas em [33], [34] e, mais recentemente, em [35].

Vimos na Seção 2.3 que o polítoto de emparelhamentos  $\mathcal{M}(T)$  é determinado pelas inequações

- (i)  $x(e) \geq 0$ , para cada aresta  $e \in E(T)$ ;
- (ii)  $\sum_{u \in N(v)} x(uv) \leq 1$ , para cada vértice  $v \in V(T)$ ,

pois  $T$ , sendo uma árvore, é um grafo bipartido. Notemos que estas são exatamente as condições que determinam  $\Omega_n(T)$ . De fato, segundo [5], existe um isomorfismo afim entre  $\Omega_n(T)$  e  $\mathcal{M}(T)$ .

**Exemplo 2.32.** *Consideremos o caminho  $P_5$  dado pela sequência de vértices  $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$ . Sejam  $e_1 = v_1 v_2$ ,  $e_2 = v_2 v_3$ ,  $e_3 = v_3 v_4$  e  $e_4 = v_4 v_5$  as arestas de  $P_5$ . O polítoto acíclico de Birkhoff  $\Omega_5(P_5)$  é o conjunto formado pelas matrizes*

$$\begin{bmatrix} 1 - x_1 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 - x_1 - x_2 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 1 - x_2 - x_3 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 1 - x_3 - x_4 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & 1 - x_4 \end{bmatrix},$$

onde cada variável  $x_i$  corresponde à aresta  $v_i v_{i+1}$  de  $P_5$  e essas variáveis devem satisfazer

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_2 + x_3 \leq 1, \quad x_3 + x_4 \leq 1.$$

Portanto, segue que  $\Omega_5(P_5) = \mathcal{M}(P_5)$ , onde

$$\mathcal{M}(P_5) = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1, x_2 + x_3 \leq 1, x_3 + x_4 \leq 1\}.$$

O caminho  $P_5$  e o esqueleto  $\mathcal{G}(\Omega_5(P_5))$  estão ilustrados na Figura 2.10.

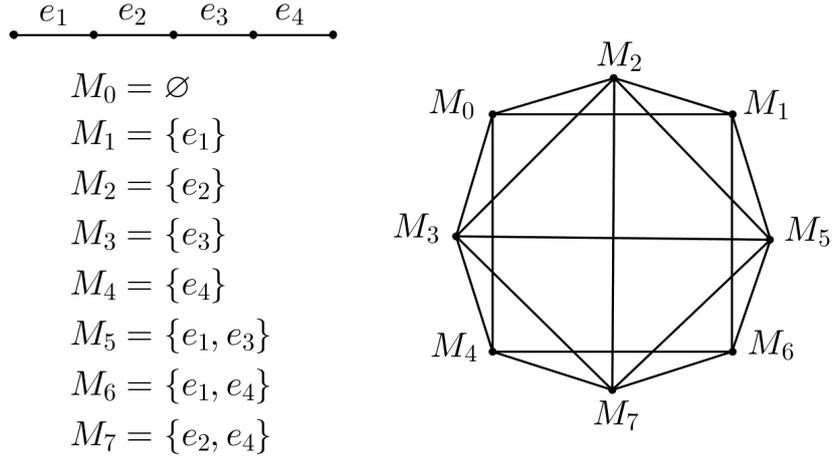


Figura 2.10:  $P_5$  e  $\mathcal{G}(\Omega_5(P_5))$

A definição a seguir pode ser encontrada em [6].

**Definição 2.33.** *Sejam  $T$  uma árvore,  $M$  um emparelhamento de  $T$  e, para  $k \geq 2$ ,  $P_k = v_1 \dots v_k$  um caminho  $M$ -alternado em  $T$ . Tal caminho é dito ser do tipo *oo* se as arestas  $v_1v_2$  e  $v_{k-1}v_k$  pertencem a  $M$  (estas arestas coincidem se  $k = 2$ ). Se  $v_1$  e  $v_k$  são  $M$ -insaturados, dizemos que  $P$  é do tipo *cc*. Por fim, se  $v_1v_2 \in M$  e  $v_k$  é  $M$ -insaturado,  $P$  é chamado de caminho do tipo *oc*. O caminho  $M$ -alternado  $P$  é dito  $M$ -bom se é de um desses três tipos.*

Notemos que se  $P$  é um caminho  $M$ -bom do tipo *oo*, então  $v_1$  e  $v_k$  são vértices  $M$ -saturados e  $|E(P)|$  é ímpar. Se  $P$  é do tipo *cc*, então a primeira e a última arestas de  $P$  não pertencem a  $M$  e  $|E(P)|$  é ímpar. Se  $P$  é do tipo *oc*, então  $|E(P)|$  é par e a última aresta de  $P$  não pertence a  $M$ . Além disso, como observado em [6], não há necessidade de definir caminho do tipo *co*, pois este pode ser incluído na categoria do tipo *oc*, invertendo a orientação do caminho.

**Exemplo 2.34.** *Seja  $T$  a árvore dada na Figura 2.11 e consideremos o emparelhamento  $M = \{e_2, e_4\}$ . Temos que  $e_2e_3e_4$ ,  $e_1e_2e_3e_4e_5$  e  $e_4e_5$  são exemplos de caminhos  $M$ -bons dos tipos *oo*, *cc* e *oc*, respectivamente. O caminho  $e_2e_3$  não é  $M$ -bom, pois o vértice  $v$  é  $M$ -saturado, mas a aresta  $e_3$  não pertence a  $M$ .*

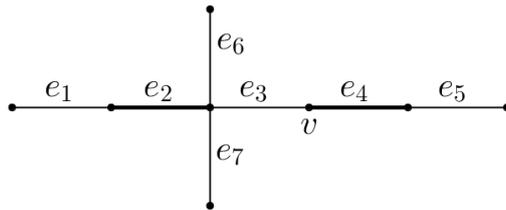


Figura 2.11: Para  $M = \{e_2, e_4\}$ ,  $P = e_2e_3$  não é  $M$ -bom

Sejam  $v_{oo}(M)$ ,  $v_{cc}(M)$  e  $v_{oc}(M)$ , o número de caminhos  $M$ -bons dos tipos  $oo$ ,  $cc$  e  $oc$ , respectivamente. O resultado a seguir mostra como calcular o grau de um vértice de  $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$ .

**Proposição 2.35.** ([6]) *Seja  $M$  um emparelhamento em uma árvore  $T$ . Então, o grau de  $M$  é dado por*

$$d(M) = v_{oo}(M) + v_{cc}(M) + v_{oc}(M).$$

Assim, para determinar o grau de um emparelhamento  $M$  em  $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$ , é suficiente encontrar o número de caminhos alternados  $M$ -bons de cada tipo.

**Exemplo 2.36.** *Retornemos à árvore da Figura 2.11. Para o emparelhamento  $M = \{e_2, e_4\}$ , temos os seguintes caminhos  $M$ -bons:*

*tipo  $oo$  :  $e_2$ ;  $e_4$ ;  $e_2e_3e_4$ ;*

*tipo  $cc$  :  $e_1e_2e_6$ ;  $e_1e_2e_7$ ;  $e_1e_2e_3e_4e_5$ ;*

*tipo  $oc$  :  $e_1e_2$ ;  $e_1e_2e_3e_4$ ;  $e_2e_6$ ;  $e_2e_7$ ;  $e_2e_3e_4e_5$ ;  $e_4e_5$ .*

*Portanto,  $d(M) = 12$ .*

Em algumas situações, o grau de um emparelhamento pode ser encontrado através de sua decomposição em emparelhamentos de menor cardinalidade.

**Definição 2.37.** *Seja  $M$  um emparelhamento em uma árvore  $T$ . Dizemos que  $v \in V(T)$  é um vértice  $M$ -insaturado interno se  $v$  não é pendente, não é isolado e é  $M$ -insaturado.*

Seja  $v \in V(T)$  um vértice  $M$ -insaturado interno de grau  $k$  ( $k \geq 2$ ). Denotemos por  $\tilde{T}_v^1, \tilde{T}_v^2, \dots, \tilde{T}_v^k$  as  $k$  sub-árvores obtidas quando o vértice  $v$  é removido e seja  $\tilde{V}^i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , seu conjunto de vértices. Então, para cada  $1 \leq i \leq k$ , consideremos a sub-árvore  $T_v^i$  de  $T$ , induzida por  $V^i = \tilde{V}^i \cup \{v\}$ .

**Exemplo 2.38.** *Na Figura 2.12, o vértice  $v$  é  $M$ -insaturado interno, onde  $M = \{e_1, e_2\}$ . A árvore  $T$  foi decomposta em duas sub-árvores:  $T_v^1, T_v^2$ .*

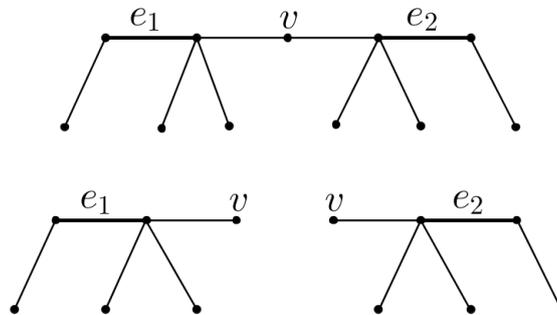


Figura 2.12: Decomposição de uma árvore a partir de um vértice  $M$ -insaturado interno

O emparelhamento  $M$  em  $T$  dá então origem a emparelhamentos  $M^i = M \cap E(T_v^i)$  em  $T_v^i$ . Seja  $d_{T_v^i}(M^i)$  o grau do vértice  $M_i$  em  $\Omega(T_v^i)$ . O resultado a seguir pode ser utilizado para encontrar o grau de emparelhamentos em  $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$ , em casos específicos como o do *caterpillar*, estudado em [6].

**Proposição 2.39.** ([6]) *Sejam  $M$  um emparelhamento em uma árvore  $T$  e  $v \in V(T)$  um vértice  $M$ -insaturado interno. Então,*

$$d(M) = \sum_{i=1}^k d_{T_v^i}(M^i).$$

Os dois resultados que seguem também são importantes para o cálculo do grau de um emparelhamento  $M$  em  $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$ .

**Proposição 2.40.** ([6]) *Seja  $T$  uma árvore. Se  $M, M'$  são emparelhamentos em  $T$  e  $M \subset M'$ , então  $d(M) \leq d(M')$ .*

**Proposição 2.41.** ([6]) *Seja  $M$  um emparelhamento em uma árvore  $T$  tal que  $M$  contém uma aresta pendente  $e \in T$ , e seja  $M' = M \setminus \{e\}$ . Então,  $d(M') = d(M)$ .*

Abreu et al. [6] mostraram que o grau mínimo de um vértice em  $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$  é igual ao número de arestas de  $T$ .

**Teorema 2.42.** ([6]) *Seja  $T$  uma árvore com  $n$  vértices. Então, o grau mínimo de um vértice em  $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$  é  $n - 1$ .*

Dada uma árvore  $T$ , existe pelo menos um vértice de  $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$  com grau mínimo  $n - 1$ , dado pelo emparelhamento  $\emptyset$ . O próximo resultado dá o número exato de emparelhamentos com grau  $n - 1$ . Seja  $V^p$  o conjunto de vértices quase pendentes de  $T$ , ou seja, se  $v \in V^p$ , então  $v$  não é pendente e é adjacente a um vértice pendente. Para cada vértice  $v \in V^p$ , seja  $d_v^p$  o número de arestas pendentes incidentes em  $v$ .

**Teorema 2.43.** ([6]) *Seja  $T$  uma árvore com  $n$  vértices. Os emparelhamentos com grau  $n - 1$  em  $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$  são exatamente o emparelhamento vazio e os emparelhamentos que possuem somente arestas pendentes. O número de tais emparelhamentos é*

$$\prod_{v \in V^p} (d_v^p + 1).$$

**Exemplo 2.44.** *Seja  $T$  a árvore dada na Figura 2.13. Do Teorema 2.42,  $\delta(\mathcal{G}(\Omega_n(T))) = 5$ , e do Teorema 2.43, os emparelhamentos de  $T$  que possuem tal grau são:  $\emptyset$ ,  $\{e_1\}$ ,  $\{e_4\}$ ,  $\{e_5\}$ ,  $\{e_1, e_4\}$  e  $\{e_1, e_5\}$ . Observamos que neste caso,  $V^p = \{v_1, v_2\}$ ,  $d_{v_1}^p = 1$  e  $d_{v_2}^p = 2$ . Assim, reobtemos que o número de emparelhamentos com grau mínimo 5 em  $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$  é  $\prod_{v \in V^p} (d_v^p + 1) = (1 + 1)(1 + 2) = 6$ .*

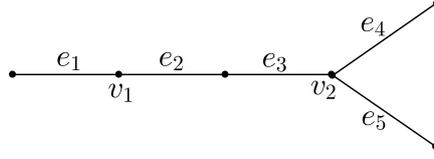


Figura 2.13:  $v_1$  e  $v_2$  são vértices quase pendentos

Como consequência do Teorema 2.43, Abreu et al. [6] caracterizaram as árvores cujo esqueleto do politopo de emparelhamentos é um grafo regular.

**Proposição 2.45.** ([6]) *Se  $T = S_{1,n-1}$  é uma estrela com  $n$  vértices, então cada emparelhamento de  $T$  tem grau  $n - 1$ . Consequentemente,  $\mathcal{G}(\Omega_n(T)) = K_n$ .*

**Corolário 2.46.** ([6]) *Seja  $T$  uma árvore. O esqueleto  $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$  é regular se, e somente se,  $T$  é uma estrela.*

Encontrar o grau máximo do grafo  $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$  é em geral mais complicado do que encontrar o grau mínimo. O seguinte resultado, que é uma consequência da Proposição 2.40, mostra que para encontrar o grau máximo de  $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$ , é suficiente procurar entre os vértices correspondentes a emparelhamentos maximais de  $T$ .

**Proposição 2.47.** ([6]) *Seja  $T$  uma árvore. Existe um emparelhamento maximal de  $T$  que possui grau máximo em  $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$ .*

Abreu et al. [6] e Fernandes [7] encontraram o grau máximo do esqueleto  $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$  quando  $T$  é o caminho  $P_n$ . Em [6], os autores mostraram que existe um emparelhamento  $M$  de  $P_n$  com grau máximo em  $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$  tal que todo vértice não pendente de  $P_n$  é  $M$ -saturado.

**Teorema 2.48.** ([6, 7]) *Para o caminho  $P_n$ , com  $n \geq 2$ , tem-se*

$$\Delta(\mathcal{G}(\Omega_n(P_n))) = \begin{cases} \frac{n^2+4n-5}{8}, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \frac{n^2+6n-8}{8}, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

**Proposição 2.49.** ([6]) *Seja o caminho  $P_n$ ,  $n \geq 2$ . Existe um emparelhamento  $M$  de  $P_n$  com grau máximo em  $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$  tal que todo vértice não pendente de  $P_n$  é saturado por  $M$ .*

**Exemplo 2.50.** *Para o caminho  $P_5$ , temos*

$$\Delta(\mathcal{G}(\Omega_5(P_5))) = \frac{25 + 20 - 5}{8} = 5.$$

A Figura 2.10 ilustra o esqueleto  $\mathcal{G}(\Omega_5(P_5))$ . Notemos que os vértices com grau máximo são  $M_2, M_3, M_5$  e  $M_7$ . Dentre estes,  $M_5$  e  $M_7$  saturam todos os vértices não pendentos de  $P_5$ .

Uma árvore que possui no máximo um vértice  $v$  de grau maior que dois é chamada de *starlike*. Se ao removermos o vértice  $v$  obtemos caminhos disjuntos  $P_{n_1}, P_{n_2}, \dots, P_{n_k}$ ,  $n_i \geq 1$ , para  $1 \leq i \leq k$ , então a *starlike* é denotada por  $S(n_1, \dots, n_k)$  (assumimos aqui que um vértice isolado é o caminho  $P_1$ ). A *starlike*  $S(n_1, \dots, n_k)$  tem  $n_1 + n_2 + \dots + n_k + 1$  vértices e diz-se que esta possui  $k$  ramos, sendo cada ramo dado pelo caminho  $P_{n_i}$ ,  $1 \leq i \leq k$ , adicionado do vértice  $v$  e da aresta entre  $v$  e  $P_{n_i}$ . Assim, os comprimentos dos ramos são, respectivamente,  $n_1, n_2, \dots, n_k$ .

Fernandes [7] encontrou o grau máximo de  $\mathcal{G}(\Omega_n(S(n_1, \dots, n_k)))$ , quando  $S(n_1, \dots, n_k)$  é uma *starlike* com todos os ramos de mesmo comprimento  $r$ .

**Teorema 2.51.** ([7]) *Seja  $T = S(n_1, \dots, n_k)$  a starlike com  $n + 1 \geq 3$  vértices e  $v \in V(T)$  tal que  $d(v) \geq 2$ . Assuma que todos os ramos em  $v$  tenham comprimento  $r$ . Então,*

$$\Delta(\mathcal{G}(\Omega_n(T))) = \begin{cases} n + 1 - \frac{(r+1)^2}{4} + \frac{3n(r^2-1)}{8r}, & \text{se } r \text{ é ímpar,} \\ \frac{(r+2)(3n-2r+4)}{8} - 1, & \text{se } r \text{ é par.} \end{cases}$$

**Exemplo 2.52.** *Seja  $S(3, 3, 3, 3, 3, 3)$  a starlike dada na Figura 2.14. Neste caso,  $n = 18$  (pois  $T$  possui 19 vértices) e todos os ramos têm comprimento  $r = 3$ . Portanto,  $\Delta(\mathcal{G}(\Omega_n(S(3, 3, 3, 3, 3, 3)))) = 19 - \frac{16}{4} - \frac{54(9-1)}{24} = 33$ .*

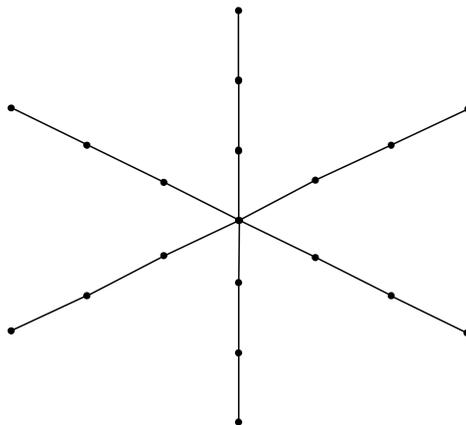


Figura 2.14: *Starlike*  $S(3, 3, 3, 3, 3, 3)$

Costa e Mohammadian [36] abordaram a seguinte questão: dadas duas árvores  $T_1$  e  $T_2$ , se  $\mathcal{G}(\Omega_n(T_1)) = \mathcal{G}(\Omega_n(T_2))$ , então  $T_1 = T_2$ ? Com o teorema a seguir eles responderam afirmativamente à pergunta dada.

**Teorema 2.53.** ([36]) *Sejam  $T_1$  e  $T_2$  árvores tais que  $\mathcal{G}(\Omega_n(T_1)) = \mathcal{G}(\Omega_n(T_2))$ . Então,  $T_1 = T_2$ .*

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados encontrados na literatura para o esqueleto de politopos de emparelhamentos de árvores. Nos capítulos posteriores estendemos alguns desses resultados, com destaque para:

- Em [6] os autores deram uma fórmula para calcular o grau de um emparelhamento  $M$  no esqueleto do politopo de emparelhamentos de uma árvore, em função do número de caminhos  $M$ -bons (veja a Proposição 2.35). No Teorema 4.7, generalizamos este resultado para um grafo qualquer;
- Estes mesmos autores mostraram que, se  $M \subset M'$  são emparelhamentos de uma árvore  $T$ , então  $d(M) \leq d(M')$  (Proposição 2.40). Consequentemente, se  $T$  possui  $m$  arestas, então  $\delta(\mathcal{G}(\Omega_n(T))) = m$  (Teorema 2.42). No Teorema 4.12 e no Corolário 4.13, estendemos estes resultados para grafos arbitrários.
- Ainda em [6], os autores provaram que os emparelhamentos com grau mínimo em  $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$  são o vazio e aqueles que possuem somente arestas pendentes (Teorema 2.43). Tal resultado foi generalizado para grafos quaisquer no Teorema 4.17.
- Por fim, em [6] foi provado que  $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$  é regular se, e somente se,  $T$  é uma estrela (Corolário 2.46). Estendemos este resultado no Teorema 4.19, mostrando que  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  é  $m$  regular se, e somente se,  $G$  possui  $m$  arestas e é uma união disjunta de estrelas ou triângulos.
- Em [36], os autores mostraram que se  $\mathcal{G}(\Omega_n(T_1)) = \mathcal{G}(\Omega_n(T_2))$ , então  $T_1 = T_2$  (veja o Teorema 2.53). No Teorema 6.12, generalizamos este resultado para grafos conexos, mostrando que  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = \mathcal{G}(\mathcal{M}(G'))$  implica  $G = G'$ , com exceção do par  $K_3$  e  $S_{1,3}$ .

## Capítulo 3

# Esqueletos de politopos de emparelhamentos de grafos em classes especiais

Apresentamos neste capítulo alguns resultados que registram os avanços iniciais deste trabalho. Visando familiarizar o leitor com esta temática, fornecemos na Seção 3.1, alguns exemplos de grafos com os respectivos esqueletos dos politopos de emparelhamentos. Na Seção 3.2, investigamos propriedades de esqueletos de politopos de emparelhamentos de grafos pertencentes a classes particulares.

De agora em diante, usaremos a sigla  $EPE(G)$  (ou simplesmente EPE) para nos referirmos ao *esqueleto do politopo de emparelhamentos* do grafo  $G$ , ou seja, ao grafo cuja notação é  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ . Apesar de algum possível desconforto pelo fato de termos uma notação e uma sigla se referindo ao mesmo objeto de estudo, esperamos que isto possa tornar a leitura do texto um pouco mais simples.

### 3.1 Alguns exemplos

Notemos inicialmente que, se  $G = G' \cup rK_1$ ,  $r \geq 1$ , então  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = \mathcal{G}(\mathcal{M}(G'))$ . Observamos também que, se a diferença simétrica de dois emparelhamentos  $M$  e  $N$  de um grafo é um ciclo  $C$ , então este é alternado com relação a  $M$  e a  $N$  e, portanto, é um ciclo par. Logo, se  $G$  é um grafo que não possui ciclo par, do Teorema 2.27 segue que  $M \sim N$  em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  se, e somente se,  $M \Delta N$  é um caminho.

**Exemplo 3.1.** A Figura 3.1 apresenta a árvore  $T$ , seguida por todos os seus emparelhamentos. Veja que  $M_1 \sim M_2$  em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))$ , pois  $M_1 \Delta M_2$  é o caminho  $P = e_1 e_2$ , e  $M_1 \not\sim M_3$ , dado ser  $M_1 \Delta M_3$  um grafo desconexo. Na Figura 3.2 é apresentado o grafo  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))$ .

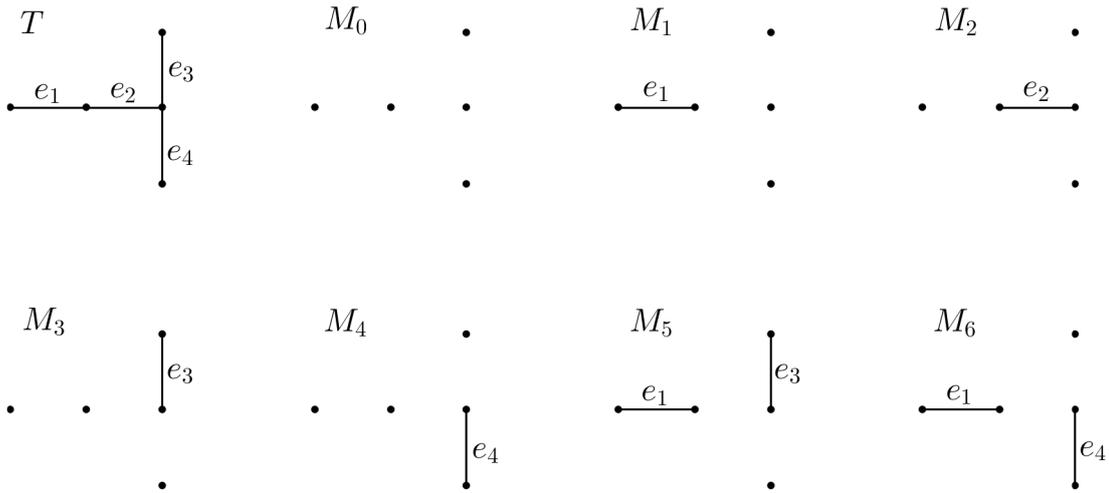


Figura 3.1: Árvore  $T$  e seus emparelhamentos

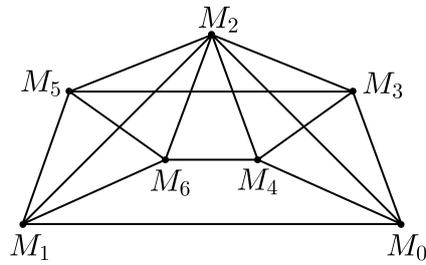
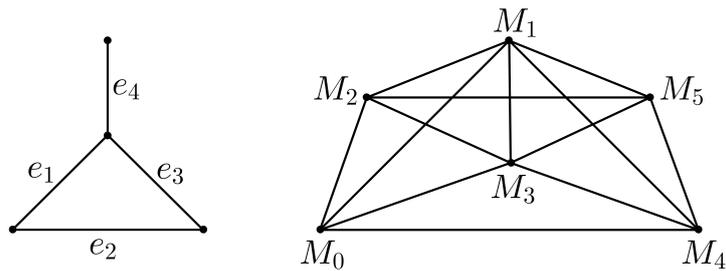


Figura 3.2:  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))$

**Exemplo 3.2.** O grafo  $G$  da Figura 3.3 não possui ciclo par. Portanto, dois emparelhamentos  $M$  e  $N$  de  $G$  são adjacentes se, e somente se,  $M\Delta N$  é um caminho.



$$M_0 = \emptyset \quad M_1 = \{e_1\} \quad M_2 = \{e_2\}$$

$$M_3 = \{e_3\} \quad M_4 = \{e_4\} \quad M_5 = \{e_2, e_4\}$$

Figura 3.3: Grafo sem ciclo par e seu EPE

**Exemplo 3.3.** Veja o ciclo  $C_4$  e o grafo  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_4))$  na Figura 3.4. Os emparelhamentos  $M_5 = \{e_1, e_3\}$  e  $M_6 = \{e_2, e_4\}$  são adjacentes, pois  $M_5 \Delta M_6$  é um ciclo em  $C_4$ .

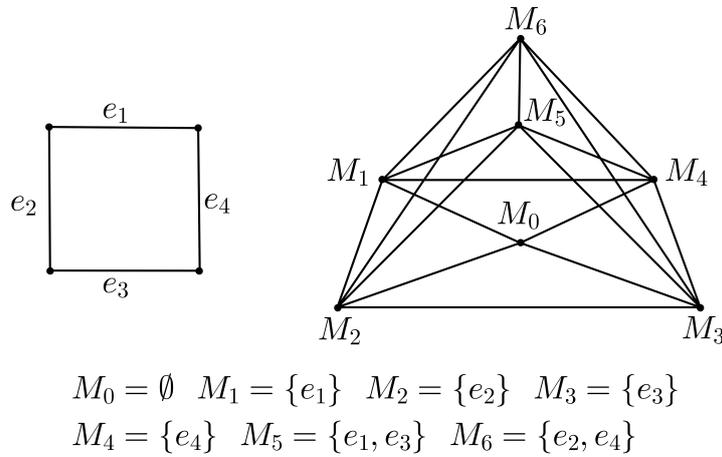


Figura 3.4:  $C_4$  e  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_4))$

Para todo grafo  $G$  conexo ou não, o  $\text{EPE}(G)$  é sempre conexo (veja [26]). O próximo exemplo mostra que o  $\text{EPE}(2K_2)$  é o grafo  $C_4$ .

**Exemplo 3.4.** Seja  $G = 2K_2$ . Os emparelhamentos de  $G$  são:  $M_0 = \emptyset, M_1 = \{e_1\}, M_2 = \{e_2\}$  e  $M_3 = \{e_1, e_2\}$ . Assim,  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = C_4$  (veja a Figura 3.5).

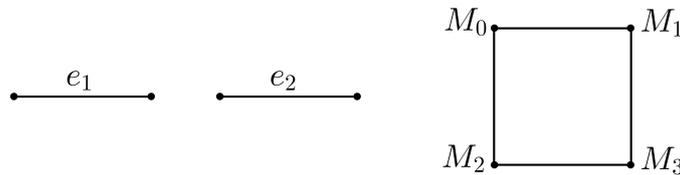
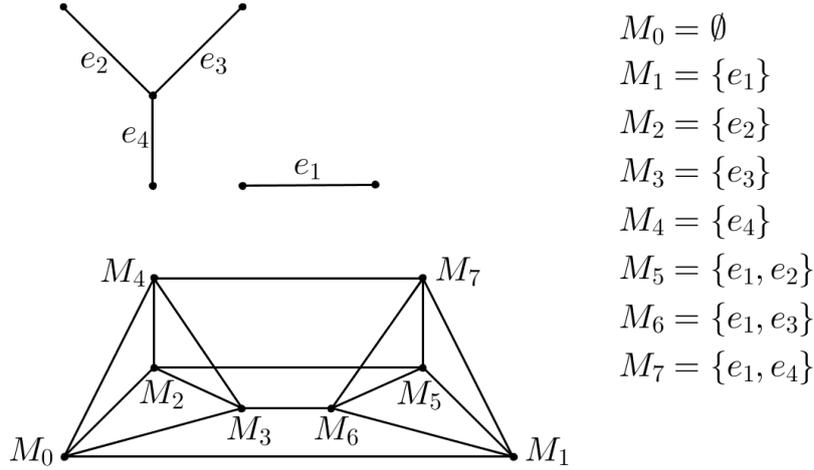


Figura 3.5:  $2K_2$  e  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(2K_2)) = C_4$

Dada uma árvore  $T$ , Abreu et al. [6] mostraram que o  $\text{EPE}(T)$  é regular se, e somente se,  $T$  é uma estrela. No Capítulo 4 apresentaremos uma generalização deste resultado para um grafo qualquer, mostrando que o  $\text{EPE}(G)$  é regular se, e somente se,  $G$  é uma união de estrelas ou triângulos.

**Exemplo 3.5.** A Figura 3.6 representa o grafo desconexo  $S_{1,3} \cup K_2$ , que é uma união de duas estrelas e cujo  $\text{EPE}$  é um grafo conexo 4-regular.



- $M_0 = \emptyset$
- $M_1 = \{e_1\}$
- $M_2 = \{e_2\}$
- $M_3 = \{e_3\}$
- $M_4 = \{e_4\}$
- $M_5 = \{e_1, e_2\}$
- $M_6 = \{e_1, e_3\}$
- $M_7 = \{e_1, e_4\}$

Figura 3.6:  $S_{1,3} \cup K_2$  e  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_{1,3} \cup K_2))$

## 3.2 Classes especiais de grafos

Nesta seção encontram-se os primeiros resultados originais que obtivemos. Começamos estudando qual a perturbação nos graus dos vértices do  $\text{EPE}(G)$ , ao se perturbar o grafo original  $G$ . Mais precisamente, iremos considerar o grafo  $\tilde{G}$  obtido de um grafo  $G$  pela adição de uma aresta  $e = uv$  entre dois vértices não adjacentes  $u$  e  $v$  de  $G$ .

**Proposição 3.6.** *Sejam  $G$  um grafo com vértices  $u$  e  $v$  não adjacentes e seja  $M$  um emparelhamento de  $G$ . Se  $\tilde{G}$  é o grafo obtido de  $G$  pela adição da aresta  $e = uv$ , então*

$$d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(\tilde{G}))}(M) \geq d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))}(M) + 1.$$

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo com dois vértices  $u$  e  $v$  não adjacentes e seja  $M$  um emparelhamento de  $G$ . Faça  $\tilde{G}$  o grafo obtido de  $G$  pela adição da aresta  $e = uv$ . Para mostrar que  $d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(\tilde{G}))}(M) \geq d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))}(M) + 1$ , é suficiente verificar que existe um emparelhamento  $N$  de  $\tilde{G}$ , adjacente a  $M$  em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(\tilde{G}))$ , tal que  $N \not\subseteq E(G)$ . Suponhamos que ambos os vértices  $u$  e  $v$  sejam  $M$ -insaturados. Neste caso,  $N = M \cup \{e\}$  é um emparelhamento de  $\tilde{G}$  tal que  $M \Delta N = \{e\}$ . Do Teorema 2.27,  $N \sim M$  em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(\tilde{G}))$ . Agora, suponhamos que um dos vértices  $u$  ou  $v$  seja saturado por  $M$ . Seja  $L$  o conjunto das arestas de  $M$  que incidem ou em  $u$  ou em  $v$  (veja que  $|L| = 1$  ou  $|L| = 2$ ) e consideremos o emparelhamento  $N = (M \setminus L) \cup \{e\}$ . Temos que  $M \Delta N = L \cup \{e\}$  é um caminho em  $\tilde{G}$  e portanto,  $N \sim M$  em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(\tilde{G}))$ .

Logo,  $d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(\tilde{G}))}(M) \geq d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))}(M) + 1$ . □

**Exemplo 3.7.** *Retornemos à árvore da Figura 3.1. O emparelhamento  $M_1$  é adjacente aos emparelhamentos  $M_0, M_2, M_5$  e  $M_6$ . Também tem-se que  $M_2$  é adjacente a  $M_0, M_1, M_3, M_4, M_5$  e  $M_6$  no esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))$ . Portanto,  $d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))}(M_1) = 4$  e*

$d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))}(M_2) = 6$ . Ao adicionarmos a aresta  $e = uv$  à árvore  $T$ , obtemos o grafo unicíclico  $G = T \cup \{e\}$  (veja a Figura 3.7). Os emparelhamentos de  $G$  são os de  $T$ , acrescentados dos emparelhamentos  $M_7, M_8$  e  $M_9$ . No grafo  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ ,  $M_1$  é adjacente tanto aos quatro vértices de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))$  quanto aos emparelhamentos  $M_7$  e  $M_8$ . Já o emparelhamento  $M_2$  é adjacente em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  aos seis vértices de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))$  e também ao emparelhamento  $M_8$ . Logo,  $d_G(M_1) = 6$  e  $d_G(M_2) = 7$ . Observamos que o grau de  $M_1$  foi acrescido de 2 unidades e, no caso de  $M_2$ , o seu grau foi acrescido de apenas 1 unidade.

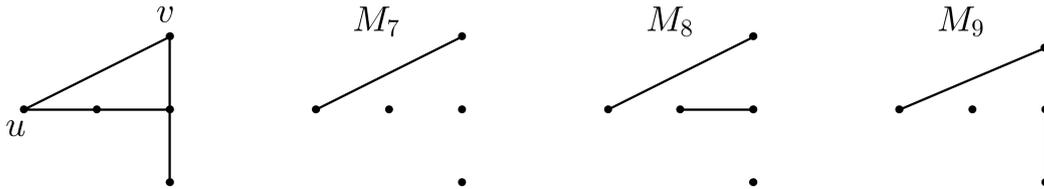


Figura 3.7: O grafo unicíclico  $G = T \cup \{e\}$  e seus novos emparelhamentos obtidos com a adição da aresta  $e = uv$

Abreu et al. [6] e Fernandes [7] estudaram algumas propriedades do  $EPE(T)$ . A partir daí, é natural pensarmos em investigar propriedades estruturais dos EPEs de grafos com pelo menos um ciclo. Faremos isso passo a passo. Primeiro, vamos considerar uma das estruturas mais simples de árvore, o caminho, e investigar o caso em que a adição de uma aresta gera um ciclo qualquer. Depois, iremos considerar o caso em que a adição de mais de uma aresta gera somente ciclos de comprimento três. Em seguida, estudaremos os grafos obtidos pela adição de  $k$  arestas a uma estrela, de modo que os  $k$  triângulos formados não tenham arestas em comum. Finalmente, para  $p \geq 1$ , consideraremos o grafo obtido pelo *join* de  $K_2$  com  $p$  vértices isolados. Em cada caso obteremos o número de vértices dos esqueletos dos politopos de emparelhamentos dos grafos. Para os dois últimos, determinaremos também o grau mínimo dos respectivos EPEs.

### 3.2.1 O grafo $P_{n,t}^i$

**Definição 3.8.** Sejam  $t \geq 2$  um número inteiro e  $P_n = v_1v_2 \dots v_n$  um caminho com  $n \geq t + 1$  vértices. Definimos  $P_{n,t}^i$  como sendo o grafo obtido de  $P_n$  ao adicionarmos a aresta  $v_iv_{i+t}$ , para  $i \in \{1, \dots, n - t\}$ .

O grafo  $P_{n,t}^i$  é unicíclico, cujo ciclo tem comprimento  $t + 1$ . Se  $i = 1$  e  $t = n - 1$ ,  $P_{n,t}^i$  é o ciclo  $C_n$ . Ao removermos de  $P_{n,t}^i$  os vértices  $v_i$  e  $v_{i+t}$ , obtemos um grafo com no máximo três componentes conexas não vazias, que são os caminhos  $P_{i-1}$ ,  $P_{t-1}$  e  $P_{n-i-t}$ , onde convencionamos que  $P_0 = \emptyset$  e  $P_1$  é um vértice isolado.

**Exemplo 3.9.** A Figura 3.8 representa o grafo  $P_{9,3}^3$ .

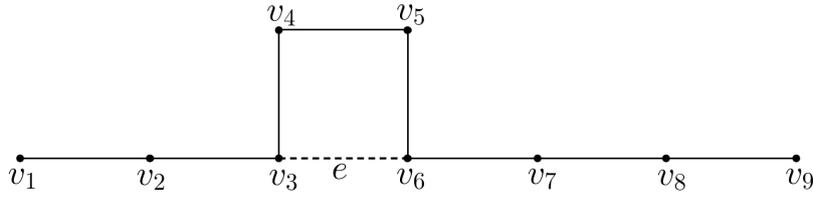


Figura 3.8:  $P_{9,3}^3$

A sequência de Fibonacci é a sequência  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definida recursivamente da seguinte forma:  $f_1 = f_2 = 1$  e  $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$ , para  $k \geq 3$ . Dahl [25] provou que, para o caminho  $P_n$ , o número de vértices do esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_n))$  é igual a  $f_{n+1}$ . Este é o número de distintos emparelhamentos do caminho  $P_n$ . Deste fato, vamos encontrar o número de vértices do esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{n,t}^i))$ .

**Proposição 3.10.** Para  $t \geq 2$ ,  $1 \leq i \leq n-t$  e  $n \geq t+1$ , o número de vértices do esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{n,t}^i))$  é dado por

$$f_{n+1} + f_i f_t f_{n-i-t+1},$$

onde  $f_k$  é o  $k$ -ésimo termo da sequência de Fibonacci.

*Demonstração.* Como  $P_{n,t}^i$  é o grafo obtido do caminho  $P_n$  adicionando-se a aresta  $e = v_i v_{i+t}$ , o número de emparelhamentos de  $P_{n,t}^i$  é igual ao número de emparelhamentos de  $P_n$ ,  $f_{n+1}$ , mais o número de emparelhamentos de  $P_{n,t}^i$  que contêm a aresta  $e$ . Estes são do tipo  $M \cup \{e\}$ , para algum emparelhamento  $M$  de  $P_{i-1} \cup P_{t-1} \cup P_{n-i-t}$ . Portanto, usando o resultado de Dahl [25] acima mencionado, o número destes emparelhamentos é dado pelo produto  $f_i f_t f_{n-i-t+1}$ . Logo, o número de emparelhamentos de  $P_{n,t}^i$  é  $f_{n+1} + f_i f_t f_{n-i-t+1}$ .  $\square$

**Corolário 3.11.** O número de vértices do esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_n))$  é igual a  $f_n + 2f_{n-1}$ .

*Demonstração.* Para  $n \geq 3$ ,  $i = 1$  e  $t = n-1$ , temos que  $P_{n,t}^i = C_n$ . Da Proposição 3.10, o número de vértices de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_n))$  é igual a  $f_{n+1} + f_1 f_{n-1} f_1 = f_n + 2f_{n-1}$ .  $\square$

**Exemplo 3.12.** Observamos que  $P_{3,2}^1 = C_3$ . Portanto,  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{3,2}^1)) = K_4$  possui 4 vértices. Isto pode ser reobtido do Corolário 3.11, em que se tem  $f_3 + 2f_2 = 4$ .

Para o grafo  $P_{9,3}^3$  da Figura 3.8, temos  $n = 9, t = 3$  e  $i = 3$ . Retirando-se os vértices  $v_3$  e  $v_6$ , obtemos três componentes conexas disjuntas:  $P_2, P_2$  e  $P_3$ . Assim, o número de vértices de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{9,3}^3))$  é  $f_{10} + f_3 f_3 f_4 = 67$ , dado que  $f_{10} = 55, f_3 = 2$  e  $f_4 = 3$ .

Para o grafo  $P_{6,2}^2$  da Figura 3.9, temos  $n = 6, t = 2$  e  $i = 2$ . Assim, o número de vértices do esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{6,2}^2))$  é  $f_7 + f_2 f_2 f_3 = 15$ , pois  $f_7 = 13, f_2 = 1$  e  $f_3 = 2$ .

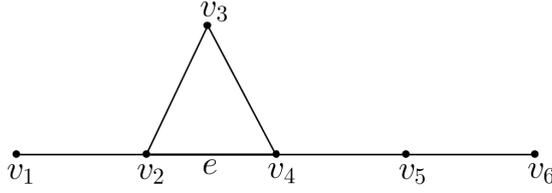


Figura 3.9:  $P_{6,2}^2$

### 3.2.2 O grafo $P_n^{i_1, i_2, \dots, i_k}$

A seguir estudaremos o EPE de um grafo obtido ao adicionarmos mais do que uma aresta em um caminho de modo a formarmos triângulos sem arestas em comum.

**Definição 3.13.** *Sejam  $P_n = v_1 v_2 \dots v_n$  um caminho de ordem  $n \geq 3$  e  $k$  um inteiro tal que  $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ . Seja uma sequência de  $k+1$  números naturais tais que  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n-2$ , com  $i_{s+1} - i_s \geq 2$ , para  $s = 1, \dots, k-1$ . O grafo  $P_n^{i_1, i_2, \dots, i_k}$  é obtido do caminho  $P_n$  ao adicionarmos as arestas  $e_1 = v_{i_1} v_{i_1+2}$ ,  $\dots$ ,  $e_k = v_{i_k} v_{i_k+2}$ .*

**Exemplo 3.14.** *O grafo  $P_9^{2,4,7}$  (veja a Figura 3.10) é obtido de  $P_9$  ao adicionarmos as arestas  $e_1 = v_2 v_4$ ;  $e_2 = v_4 v_6$  e  $e_3 = v_7 v_9$ .*

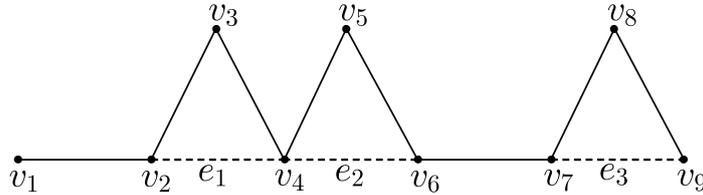


Figura 3.10:  $P_9^{2,4,7}$

Interessa-nos agora calcular o número de vértices de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_n^{i_1, \dots, i_k}))$ . Para tal, utilizamos uma fórmula recursiva, que depende de  $i_{k-1} + 2$  ser estritamente menor ou igual a  $i_k$ , ou seja, depende das arestas  $e_{k-1}$  e  $e_k$  serem adjacentes ou não. Denotemos por  $\mathcal{N}(G)$  o número de emparelhamentos de  $G$ . Isto significa que  $\mathcal{N}(G)$  é o número de vértices de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ .

**Proposição 3.15.** *Seja  $k \geq 2$ . Se  $i_{k-1} + 2 \neq i_k$ , então o número de vértices de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_n^{i_1, \dots, i_k}))$  é dado por*

$$\mathcal{N}(P_n^{i_1, \dots, i_k}) = \mathcal{N}(P_n^{i_1, \dots, i_{k-1}}) + \mathcal{N}(P_{i_{k-1}}^{i_1, \dots, i_{k-1}} \cup P_{n-i_k-2}).$$

*Se  $i_{k-1} + 2 = i_k$ , então o número de vértices de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_n^{i_1, \dots, i_k}))$  é dado por*

$$\mathcal{N}(P_n^{i_1, \dots, i_k}) = \mathcal{N}(P_n^{i_1, \dots, i_{k-1}}) + \mathcal{N}(P_{i_k-1}^{i_1, \dots, i_{k-2}} \cup P_{n-i_k-2}),$$

onde  $P_s^{i_0}$  denota o caminho  $P_s$ .

*Demonstração.* Os emparelhamentos de  $P_n^{i_1, \dots, i_k}$  são os mesmos de  $P_n^{i_1, \dots, i_{k-1}}$  acrescidos daqueles obtidos com a adição da aresta  $v_{i_k} v_{i_k+2}$ .

Se  $i_{k-1} + 2 \neq i_k$ , as componentes conexas (não triviais) obtidas pela remoção dos vértices  $v_{i_k}$  e  $v_{i_k+2}$  são  $P_{i_k-1}^{i_1, \dots, i_{k-1}}$  e  $P_{n-i_k-2}$ . Portanto,

$$\mathcal{N}(P_n^{i_1, \dots, i_k}) = \mathcal{N}(P_n^{i_1, \dots, i_{k-1}}) + \mathcal{N}(P_{i_k-1}^{i_1, \dots, i_{k-1}} \cup P_{n-i_k-2}).$$

Se  $i_{k-1} + 2 = i_k$ , as componentes conexas (não triviais) resultantes da remoção dos vértices  $v_{i_k}$  e  $v_{i_k+2}$  são  $P_{i_k-1}^{i_1, \dots, i_{k-2}}$  e  $P_{n-i_k-2}$ . Logo,

$$\mathcal{N}(P_n^{i_1, \dots, i_k}) = \mathcal{N}(P_n^{i_1, \dots, i_{k-1}}) + \mathcal{N}(P_{i_k-1}^{i_1, \dots, i_{k-2}} \cup P_{n-i_k-2}),$$

onde  $P_s^{i_0}$  é o caminho  $P_s$ . □

**Exemplo 3.16.** Para o grafo  $P_{11}^{4,7}$  da Figura 3.11, o número de vértices de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{11}^{4,7}))$  é  $\mathcal{N}(P_{11}^{4,7}) = \mathcal{N}(P_{11}^4) + \mathcal{N}(P_6^4 \cup P_2) = [f_{12} + (f_4 f_2 f_6)] + [(f_7 + f_4 f_2 f_1) \cdot f_3] = 200$ .

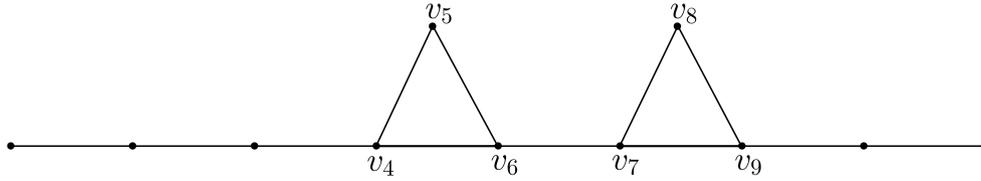


Figura 3.11:  $P_{11}^{4,7}$

Para o grafo  $P_{10}^{3,5}$  da Figura 3.12, o número de vértices de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{10}^{3,5}))$  é  $\mathcal{N}(P_{10}^{3,5}) = \mathcal{N}(P_{10}^3) + \mathcal{N}(P_4 \cup P_3) = [f_{11} + (f_3 f_2 f_6)] + [f_5 \cdot f_4] = 120$ .

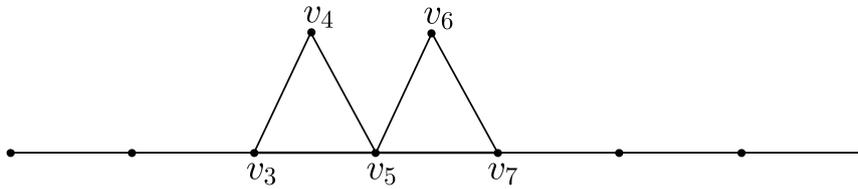


Figura 3.12:  $P_{10}^{3,5}$

### 3.2.3 O grafo $S_n^k$

Nesta subseção estudamos o grafo obtido pela adição de  $k$  arestas à estrela  $S_{1,n-1}$ , formando  $k$  triângulos sem arestas em comum. Para tais grafos, calculamos o número de vértices dos seus EPEs com os respectivos graus.

**Definição 3.17.** Para  $n \geq 3$ , seja  $S_{1,n-1}$  uma estrela com  $n$  vértices. Dado  $k \in \{1, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$ , o grafo  $S_n^k$  é aquele obtido de  $S_{1,n-1}$  pela adição de  $k$  arestas conectando pares de vértices pendentes, dois a dois disjuntos.

O grafo  $S_n^k$  possui  $k$  triângulos e dois quaisquer desses triângulos possuem um único vértice comum, que é o vértice central da estrela  $S_{1,n-1}$ . Além disso,  $S_n^k$  possui  $n - 2k - 1$  arestas pendentes. Sendo  $m$  o número de arestas deste grafo, então  $m = n + k - 1$ .

Quando  $n$  é ímpar e  $k = \frac{n-1}{2}$ ,  $S_n^k$  é o grafo conhecido como *friendship* (veja [37]). Se  $n = 3$ , a única possibilidade é se ter  $k = 1$  e o grafo  $S_3^1$  coincide com  $K_3$ .

**Exemplo 3.18.** O grafo  $S_9^3$  é obtido da estrela  $S_{1,8}$  ao adicionarmos as arestas  $e_1 = v_1v_2$ ;  $e_2 = v_3v_4$  e  $e_3 = v_5v_6$ , como mostra a Figura 3.13.

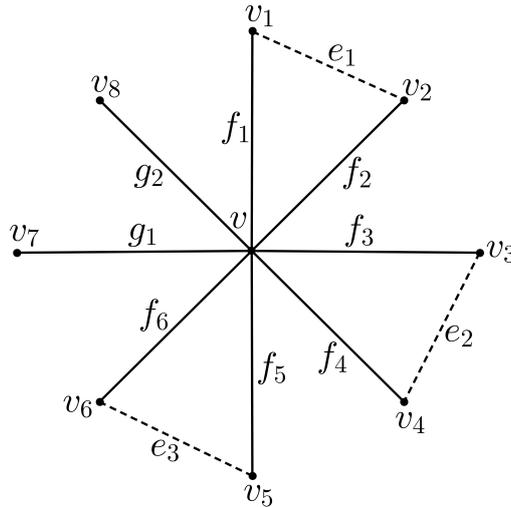


Figura 3.13:  $S_9^3$

Há três tipos de arestas em  $S_n^k$  com características distintas. Dizemos que as *arestas de tipo 1* são as arestas pendentes, as de *tipo 2* são as não pendentes que incidem no vértice central e as de *tipo 3* são as demais arestas.

Notemos que existem  $n - 2k - 1$  arestas do tipo 1, denotadas por  $g_p$ ,  $1 \leq p \leq n - 2k - 1$ ; as arestas de tipo 2 são em número de  $2k$  e serão denotadas por  $f_j$ ,  $1 \leq j \leq 2k$ ; e há  $k$  arestas de tipo 3, denotadas por  $e_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . As arestas dos tipos 1 e 2 incidem no vértice central de  $S_n^k$  e todas as arestas do tipo 3 não incidem em tal vértice (veja a Figura 3.13).

Os tipos de emparelhamentos de  $S_n^k$  podem ser dados em função dos tipos de arestas.

**Definição 3.19.** Seja  $M \neq \emptyset$  um emparelhamento de  $S_n^k$ .  $M$  é de tipo 1 se possui uma aresta de tipo 1; de tipo 2 se possui uma aresta de tipo 2; e de tipo 3 se possui somente arestas de tipo 3.

O emparelhamento vazio e os definidos acima são os únicos tipos de emparelhamentos possíveis em  $S_n^k$ .

**Exemplo 3.20.**  $S_4^1$  é um grafo com 4 vértices e 1 triângulo, como mostra a Figura 3.14. Temos:  $M_4$  e  $M_5$  de tipo 1;  $M_1$  e  $M_3$  de tipo 2;  $M_2$  de tipo 3.

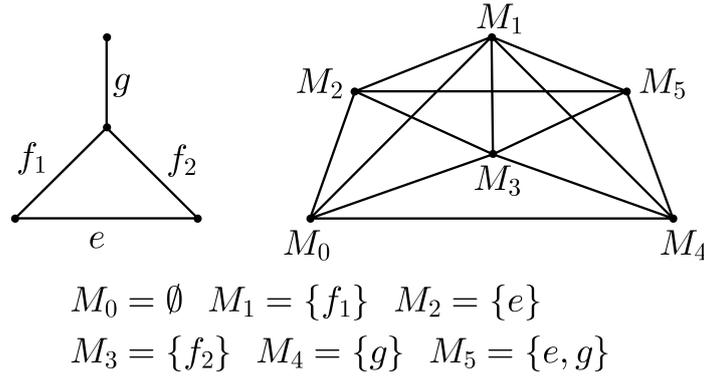


Figura 3.14:  $S_4^1$  e  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_4^1))$

O resultado seguinte determina o número de emparelhamentos dos grafos  $S_n^k$ , ou equivalentemente, o número de vértices dos respectivos EPEs.

**Teorema 3.21.** Para  $n \geq 3$  e  $k \in \{1, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\}$ , o número de vértices do esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_n^k))$  é igual a  $2^k(n-k)$ .

*Demonstração.* Fixemos o número  $k$  de triângulos e façamos indução sobre o número de vértices  $n$  de  $S_n^k$ .

Para  $k$  fixo, o menor  $n$  possível é  $n = 2k + 1$ . Neste caso não há emparelhamentos de tipo 1. Para cada aresta de tipo 2, o número de emparelhamentos do tipo 2 que contêm esta aresta é

$$1 + \left[ \binom{k-1}{1} + \binom{k-1}{2} + \dots + \binom{k-1}{k-1} \right] = 2^{k-1}.$$

Como há  $2k$  arestas de tipo 2, o número de emparelhamentos de tipo 2 é  $2k(2^{k-1})$ .

Dado que cada emparelhamento de tipo 3 possui somente arestas de tipo 3 e há  $k$  arestas deste tipo, o número de tais emparelhamentos é

$$\left[ \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \dots + \binom{k}{k} \right] = 2^k.$$

Portanto, o número total de emparelhamentos de  $S_n^k$  é  $2k(2^{k-1}) + 2^k = k2^k + 2^k = 2^k(k+1) = 2^k(n-k)$ , pois  $n = 2k + 1$ .

Suponhamos agora que a afirmação seja válida para  $n \geq 2k + 1$ , isto é, o número de emparelhamentos do grafo  $S_n^k$  é  $2^k(n - k)$ . Acrescentemos um novo vértice  $u$  junto com a respectiva aresta  $g_u$ , de tipo 1, para obter o grafo  $S_{n+1}^k$ . Os novos emparelhamentos obtidos são do tipo  $M = \{g_u\} \cup N$ , onde  $N$  é um emparelhamento formado por arestas de tipo 3, pois estas são as únicas não adjacentes a  $g_u$ . Portanto, o número de novos emparelhamentos obtidos ao acrescentar o vértice  $u$  é

$$1 + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \cdots + \binom{k}{k} = 2^k.$$

Usando a hipótese de indução, tem-se que o número de emparelhamentos do grafo  $S_{n+1}^k$  é

$$2^k(n - k) + 2^k = 2^k(n + 1 - k).$$

Logo, o número de vértices de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_n^k))$  é  $2^k(n - k)$ .  $\square$

**Exemplo 3.22.** O esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_4^1))$ , exibido na Figura 3.14, possui  $2^1(4 - 1) = 6$  vértices.

Se  $n = 3$ , já sabemos que  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_n^k))$  é regular e isomorfo a  $K_4$ . Vamos ver que, se  $n > 3$ , então  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_n^k))$  é um grafo birregular.

**Teorema 3.23.** Para  $n > 3$ , o grafo  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_n^k))$  é birregular com grau mínimo  $\delta = n + k - 1$ , e grau máximo  $\Delta = 2n + k - 4$ . No caso em que  $n = 3$ ,  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_n^k))$  é regular e isomorfo a  $K_4$ .

*Demonstração.* Seja  $n > 3$ . Vamos mostrar que, se  $M$  é um emparelhamento do tipo 1 ou do tipo 3 em  $S_n^k$ , então o grau de  $M$  é igual ao número de arestas de  $S_n^k$  (ou seja, igual a  $m = n - 1 + k$ ) e, se  $M$  é um emparelhamento de tipo 2, então o grau de  $M$  é  $2n + k - 4$ .

Suponhamos primeiro que  $M$  seja de tipo 1. Neste caso, existirão uma aresta do tipo 1 e possíveis arestas do tipo 3, de modo que  $M = \{g\}$  ou  $M = \{g, e_1, \dots, e_s\}$ , para  $s = 1, \dots, k$ . Se  $M = \{g\}$ , temos  $N(M) = \{\emptyset, \{g_p : g_p \neq g\}, \{f_j\}, \{g, e_i\}\}$ . Portanto,  $d(M) = 1 + n - 2 + k = n - 1 + k$ . Se  $1 \leq s \leq k$ , seja  $M = \{g, e_1, \dots, e_s\}$ . Neste caso,  $N(M) = \{\{e_1, \dots, e_s\}; \{g, e_1, \dots, e_s\} \setminus \{e_i\}; (\{g, e_1, \dots, e_s\} \setminus \{e_i\}) \cup \{f_i\}; \{g_p, e_1, \dots, e_s\}; \{g, e_1, \dots, e_s\} \setminus \{e_i\} \cup \{e_j\}; \{f, e_1, \dots, e_s\}; \{g, e_1, \dots, e_s, e_j\}\}$ . Portanto,  $d(M) = (1 + s) + 2s + (n - 2k - 2) + (k - s) + (2k - 2s) + (k - s) = n - k + 1$ .

Suponhamos agora que  $M$  seja de tipo 3. Então, existem  $s$  arestas do tipo 3,  $1 \leq s \leq k$ , tais que  $M = \{e_1, \dots, e_s\}$ . Suponha  $s = 1$ . Neste caso,  $N(M) = \{\emptyset, \{f\}, \{e, e_i\}, \{e, f_i\}, \{e, g_p\}\}$  e, portanto,  $d(M) = 1 + 2 + (k - 1) + (2k - 2) + (n - 2k - 1) = n - 1 + k$ . Vejamos agora os casos em que  $s \geq 2$ . Temos que  $N(M) = \{\{e_1, \dots, e_s\} \setminus \{e_i\}; (\{e_1, \dots, e_s\} \setminus \{e_i\}) \cup \{f_i\}; \{e_1, \dots, e_s, e_j\}; \{g, e_1, \dots, e_s\}; \{f, e_1, \dots, e_s\}\}$ . Logo,  $d(M) = s + 2s + (k - s) + (n - 1 - 2k) + (2k - 2s) = n - 1 + k$ .

Por fim, seja  $M$  um emparelhamento de tipo 2. Neste caso, existirão uma aresta do tipo 2 e possíveis arestas do tipo 3, de modo que para  $1 \leq s \leq k-1$ ,  $M = \{f\}$  ou  $M = \{f, e_1, \dots, e_s\}$ . Suponhamos inicialmente que  $M = \{f\}$ . Neste caso,  $N(M) = \{\emptyset; \{f_j : f_j \neq f\}; \{g_p\}; \{e\}; \{f, e_i (e_i \neq e)\}; \{e, f_j (f_j \neq f)\}; \{e, g_p\}\}$ . Portanto,  $d(M) = 1 + (n-2+1) + (k-1) + (2k-2) + (n-1-2k) = 2n+k-4$ . Seja agora  $M = \{f, e_1, \dots, e_s\}$ ,  $1 \leq s \leq k-1$ . Então,  $N(M) = \{\{e_1, \dots, e_s\}; \{f, e_1, \dots, e_s\} \setminus \{e_i\}; (\{e_1, \dots, e_s\} \setminus \{e_i\}) \cup \{f_i\}; \{e, e_1, \dots, e_s\}; \{f_j, e_1, \dots, e_s\}; \{g_p, e_1, \dots, e_s\}; (\{e, e_1, \dots, e_s\} \setminus \{e_i\}) \cup \{f_i\}; \{f, e_1, \dots, e_s, e_i\}; \{g, e_1, \dots, e_s\}; \{f_j, e, e_1, \dots, e_s\}\}$ . Logo,  $d(M) = 1 + s + 2s + 1 + (2k-2s-1) + (n-1-2k) + 2s + (k-s-1) + (n-1-2k) + (2k-2s-2) = 2n+k-4$ .  $\square$

O teorema anterior permite calcular o número de vértices de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_n^k))$  que possuem grau mínimo e o número de vértices que possuem grau máximo.

**Corolário 3.24.** *O número de vértices de grau máximo em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_n^k))$  é  $k2^k$  e o número de vértices de grau mínimo é  $(n-2k)2^k$ .*

**Corolário 3.25.** *O número de arestas do esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_{n,k}))$  é  $2^{k-1}[n(n+k-1) - k(2+k)]$ .*

**Exemplo 3.26.** *Retornemos ao grafo  $S_4^1$  da Figura 3.14. Do Corolário 3.24, segue que  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_4^1))$  possui dois vértices de grau máximo 5 e quatro vértices de grau mínimo 4. Do Corolário 3.25, este grafo possui 13 arestas.*

### 3.2.4 O grafo $B_p$

Para  $p \geq 1$ , seja  $B_p$  o grafo obtido pelo *join* de  $K_2$  com  $p$  vértices isolados, ou seja,  $B_p = K_2 \vee \overline{K_p}$ . Tal grafo é conhecido na literatura por *triangular book* (veja [38]).

Denotemos por  $f$  a aresta comum aos  $p$  triângulos do grafo  $B_p$ . Para cada vértice  $v_i$  não saturado por  $f$ , sejam  $e_i$  e  $e'_i$  as duas arestas que incidem em  $v_i$  (ver Figura 3.15). No que segue, iremos supor que as arestas  $e_i$  incidem no mesmo vértice  $u$  da aresta  $f$ , o mesmo ocorrendo com as arestas  $e'_i$ , que incidem no vértice  $w$  de  $f$ . O teorema a seguir dá o número de emparelhamentos de  $B_p$ , ou equivalentemente, o número de vértices de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(B_p))$ , e os graus mínimo e máximo deste grafo.

**Exemplo 3.27.** *A Figura 3.15 representa o grafo  $B_6$ .*

**Teorema 3.28.** *O número de vértices do esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(B_p))$  é  $p^2 + p + 2$ . Para este grafo, o grau mínimo é  $\delta = 2p + 1$  e o grau máximo é  $\Delta = p^2 + p + 1$ .*

*Demonstração.* Os emparelhamentos de  $B_p$  são o vazio e aqueles formados por uma ou duas arestas. O número de emparelhamentos formados por duas arestas é  $p(p-1)$ . Como este grafo possui  $2p+1$  arestas, concluímos que o número de vértices de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(B_p))$  é  $p(p-1) + 2p + 1 + 1 = p^2 + p + 2$ .

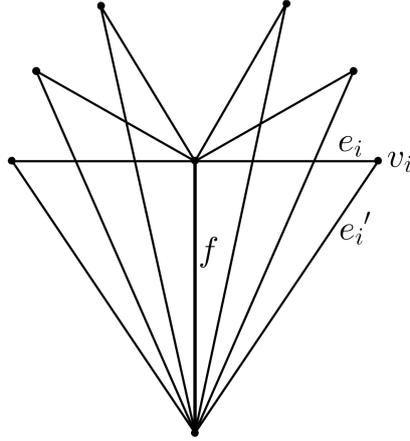


Figura 3.15: Triangular Book  $B_6$

Se  $M = \emptyset$ , não é difícil mostrar que  $d(M)$  é igual ao número de arestas de  $B_p$ , isto é,  $d(M) = 2p + 1$ .

Para  $M = \{e_i\}$ , temos que  $N(M) = \{\emptyset, \{e_j : j \neq i\}, \{e_i'\}, \{f\}, \{e_i, e_j' : j \neq i\}, \{e_j, e_i' : j \neq i\}\}$ . Portanto,  $d(M) = 1 + (p - 1) + 1 + 1 + (p - 1) + (p - 1) = 3p$ . Analogamente, se  $M = \{e_i'\}$ , então  $d(M) = 3p$ .

Se  $M = \{f\}$ , então  $M$  é adjacente a todos os demais emparelhamentos de  $B_p$ . Assim,  $d(M) = p^2 + p + 1$ .

Por fim, se  $p \geq 2$  e  $M = \{e_i, e_j'\}$ , tem-se que  $d(M) = 4p - 2$ . □

**Exemplo 3.29.** Na Figura 3.16 são dados os grafos  $B_2$  e o seu EPE. Este último tem  $2^2 + 2 + 2 = 8$  vértices, grau mínimo  $\delta = 2 \cdot 2 + 1 = 5$  e grau máximo  $\Delta = 2^2 + 2 + 1 = 7$ .

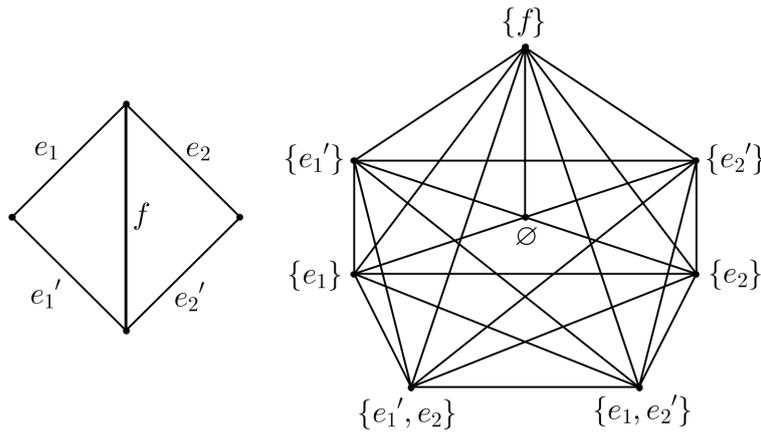


Figura 3.16: Os grafos  $B_2$  e  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(B_2))$

Vimos que ao se acrescentar arestas em uma árvore de modo a formar ciclos, os números de vértices dos EPEs resultantes podem aumentar significativamente. O mesmo acontece com relação aos graus dos seus vértices. Parte dos resultados deste capítulo foram apresentados no XLVIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional - SBPO 2016 e podem ser encontrados em [39].

# Capítulo 4

## Grau de um emparelhamento

Neste capítulo apresentamos algumas contribuições originais, com destaque para a determinação do grau mínimo do EPE de um grafo  $G$  qualquer, bem como a caracterização dos emparelhamentos de  $G$  correspondentes aos vértices de grau mínimo em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ . O capítulo está dividido em duas partes: na Seção 4.1, apresentamos uma forma de calcular o grau de um emparelhamento de  $G$ ; na Seção 4.2, provamos que o grau de um emparelhamento não decresce com o acréscimo de arestas ao grafo. Decorrente disto, mostramos que o grau mínimo do esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  é igual ao número de arestas de  $G$ , encontramos todos os emparelhamentos que possuem tal grau e, como aplicação, caracterizamos os grafos cujos EPEs são regulares.

### 4.1 Cálculo do grau de um emparelhamento

Os primeiros avanços no cálculo do grau de um emparelhamento  $M$  de um grafo  $G$  são devidos a Abreu et al. [6] e Fernandes [7]. Para uma árvore  $T$ , o grau de um vértice de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))$  foi determinado por estes autores. Nesta seção generalizamos este resultado, apresentando um procedimento para calcular o grau de um emparelhamento de um grafo qualquer. Iniciamos com a seguinte proposição, que é uma consequência do Teorema 2.27.

**Proposição 4.1.** *Sejam  $M$  e  $N$  dois emparelhamentos distintos de um grafo  $G$ . Se  $M$  é adjacente a  $N$  em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  então  $|M| = |N|$  ou  $||M| - |N|| = 1$ .*

*Demonstração.* Sejam  $M$  e  $N$  dois emparelhamentos distintos de  $G$  tais que  $M \sim N$  em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ . Do Teorema 2.27, temos que  $M\Delta N$  é um ciclo ou um caminho em  $G$  (alternado com relação a  $M$  e  $N$ ). Portanto, se  $M\Delta N = C_n$ ,  $n$  é par e  $|M| = |N|$ , o mesmo ocorrendo caso  $M\Delta N = P_n$ , para algum  $n$  ímpar. Caso  $M\Delta N = P_n$  e  $n$  seja par,  $||M| - |N|| = 1$ , conforme queríamos provar.  $\square$

O grau do emparelhamento  $\emptyset$  de um grafo  $G$  qualquer segue como aplicação deste resultado.

**Corolário 4.2.** *Dado um grafo  $G$ , o grau do vértice de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  correspondente ao emparelhamento  $\emptyset$  é igual ao número de arestas de  $G$ .*

*Demonstração.* Sejam  $G$  um grafo e  $\emptyset$  o emparelhamento vazio de  $G$ . Seja  $N$  um emparelhamento de  $G$  tal que  $N \sim \emptyset$  em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ . Da Proposição 4.1,  $|N| = 1$ , ou seja,  $N$  é um emparelhamento unitário de  $G$ . Reciprocamente, se  $M = \{e\}$  é um emparelhamento unitário de  $G$ , segue do Teorema 2.28 que  $M \sim \emptyset$ , uma vez que  $M\Delta\emptyset = \{e\}$ . Logo  $d(\emptyset) = |E(G)| = m$ .  $\square$

Dado um emparelhamento  $M$  de uma árvore  $T$ , Abreu et al. [6] introduziram o conceito de caminho  $M$ -bom (veja a Definição 2.33) para o cálculo do grau de  $M$ . Nosso objetivo é deduzir uma fórmula para o cálculo do grau de um emparelhamento  $M$  em um grafo qualquer.

**Definição 4.3.** *Sejam  $M$  um emparelhamento de um grafo  $G$  e  $P$  um caminho  $M$ -alternado em  $G$  com  $k \geq 2$  vértices. Dizemos que:*

- (i)  *$P$  é um caminho do tipo oo se as suas arestas pendentes pertencem a  $M$  (elas coincidem caso  $P = P_2$ );*
- (ii)  *$P$  é um caminho do tipo cc se ambos os seus vértices pendentes são  $M$ -insaturados;*
- (iii)  *$P$  é um caminho do tipo oc se uma de suas arestas pendentes pertence a  $M$  e um dos seus vértices pendentes é  $M$ -insaturado.*

*O caminho  $M$ -alternado  $P$  é dito  $M$ -bom se, e somente se, é de um dos tipos acima definidos.*

Em vista do Teorema 2.27, para o cálculo do grau de um emparelhamento  $M$  de um grafo  $G$ , precisamos considerar também os ciclos  $M$ -alternados, os quais iremos chamar de *ciclos  $M$ -bons*. . Notemos que  $C$  é um ciclo  $M$ -bom de  $G$  se, e somente se,  $M \cap E(C)$  é um emparelhamento perfeito de  $C$ .

**Exemplo 4.4.** *Veja o grafo  $G$  da Figura 4.1, onde destacamos o emparelhamento  $M = \{e_1, e_3, e_7\}$ . Os caminhos  $e_1e_2e_3$ ,  $e_6e_7e_8$  e  $e_6e_7$  são  $M$ -bons dos tipos oo, cc e oc, respectivamente. Veja também que o ciclo  $e_1e_2e_3e_4$  é  $M$ -bom e que o caminho  $e_1e_2$  é  $M$ -alternado mas não é  $M$ -bom.*

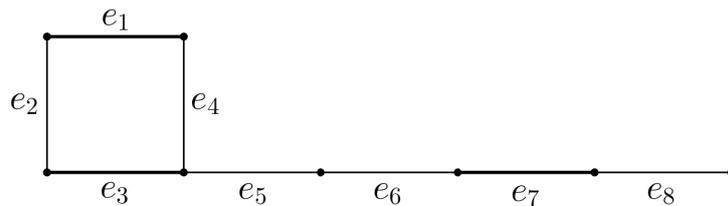


Figura 4.1: Caminhos e ciclos  $M$ -bons

**Exemplo 4.5.** Para a árvore  $T$  dada na Figura 4.2, consideremos o emparelhamento  $M = \{e_1, e_3\}$ . Os caminhos  $M$ -alternados em  $T$  são:

$P_a = e_1$ ;  $P_b = e_1e_2$ ;  $P_c = e_2e_3$ ;  $P_d = e_1e_2e_3$ ;  $P_e = e_3$  e  $P_f = e_3e_4$ .

Dentre estes, os caminhos  $M$ -bons são:

$P_a = e_1$ ;  $P_d = e_1e_2e_3$ ;  $P_e = e_3$  e  $P_f = e_3e_4$ .

Do Teorema 2.27, os emparelhamentos  $M_1 = \{e_1\}$ ,  $M_2 = \{e_2\}$ ,  $M_3 = \{e_3\}$  e  $M_4 = \{e_1, e_4\}$  são os únicos emparelhamentos de  $T$  adjacentes a  $M$  em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))$ . Observamos que estes correspondem aos caminhos  $M$ -alternados que são  $M$ -bons. Notemos, ainda, que não existe emparelhamento  $N$  em  $T$  tal que  $M\Delta N = P_b$  (o mesmo ocorrendo com  $P_c$ ). Logo,  $d(M) = 4$ , ou seja, o grau de  $M$  é exatamente o número de caminhos  $M$ -bons, que neste caso é estritamente menor do que o número de caminhos  $M$ -alternados.

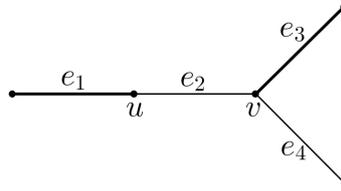


Figura 4.2: Árvore  $T$

**Lema 4.6.** Sejam  $M$  um emparelhamento de um grafo  $G$  e  $P$  um caminho  $M$ -alternado em  $G$ . Tem-se que  $P = M\Delta N$ , para algum emparelhamento  $N$  de  $G$  se, e somente se,  $P$  é um caminho  $M$ -bom.

*Demonstração.* Suponhamos que exista um emparelhamento  $N$  tal que  $P = M\Delta N = e_1 \dots e_k$  e, por contradição, suponhamos que  $P$  não seja  $M$ -bom. Temos dois casos a considerar: (1)  $e_1 \notin M$  e  $e_k \notin M$ ; (2)  $e_1 \in M$  e  $e_k \notin M$ . No primeiro caso,  $P$  deve ter um vértice  $M$ -saturado  $u$  que é pendente, pois do contrário este seria  $M$ -bom do tipo  $cc$ . Seja  $f \in M \setminus E(P)$  tal que  $f$  incide em  $u$ . Como  $P = M\Delta N$  e  $f \notin M\Delta N$ , temos que  $f \in N$ . Isto nos leva a uma contradição, pois uma das arestas de  $N$ ,  $e_1$  ou  $e_k$ , é adjacente a  $f$ . No segundo caso, chegamos a uma contradição similar, uma vez que o vértice pendente da aresta  $e_k$  seria saturado por  $M$ . Portanto,  $P$  é um caminho  $M$ -bom.

Reciprocamente, suponhamos que  $P$  seja um caminho  $M$ -bom e vejamos que  $N = P\Delta M$  é um emparelhamento de  $G$ . De fato, suponhamos que este não seja o caso, ou seja, que existam arestas adjacentes  $f, g \in E(G)$  tais que  $f, g \in N$ . Como  $N = P\Delta M$  e  $P$  é  $M$ -alternado, uma das arestas, digamos  $f$ , pertence a  $M \setminus E(P)$  e a outra,  $g$ , pertence a  $E(P) \setminus M$ . Além disso,  $g$  é aresta pendente de  $P$ , cujo respectivo vértice pendente de  $P$  é  $M$ -saturado (por  $f$ ). Isso é uma contradição, pois  $P$  é um caminho  $M$ -bom. Logo,  $N = P\Delta M$  é um emparelhamento de  $G$ .  $\square$

Seja  $G$  um grafo e  $M$  um emparelhamento de  $G$ . Denotemos por  $v_{oo}(M)$ ,  $v_{cc}(M)$  e  $v_{oc}(M)$ , o número de caminhos  $M$ -bons dos tipos  $oo$ ,  $cc$  e  $oc$ , respectivamente. Faça agora  $v_P(M) = v_{oo}(M) + v_{cc}(M) + v_{oc}(M)$ . Similarmente, defina  $v_C(M)$  como o número de ciclos  $M$ -bons de  $G$ .

**Teorema 4.7.** *Dado um emparelhamento  $M$  de um grafo  $G$ , o grau de  $M$  em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  é*

$$d(M) = v_P(M) + v_C(M).$$

*Demonstração.* Seja  $M$  um emparelhamento de  $G$ . Do Teorema 2.27, um emparelhamento  $N$  de  $G$  é adjacente a  $M$  em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  se, e somente se,  $M\Delta N$  é um caminho ou um ciclo  $M$ -alternado em  $G$ .

Do Lema 4.6, dado um caminho  $M$ -alternado  $P$ , temos que  $P = M\Delta N$ , para algum emparelhamento  $N$  de  $G$  se, e somente se,  $P$  é um caminho  $M$ -bom.

Por outro lado, se  $C$  é um ciclo  $M$ -alternado (ou seja,  $M$ -bom),  $N = C\Delta M$  é um emparelhamento de  $G$  que satisfaz  $M\Delta N = C$ .

Assim, para obtermos a fórmula desejada, é suficiente notarmos que, para  $N$  e  $N'$  emparelhamentos de  $G$ , temos que  $M\Delta N = M\Delta N'$  se, e somente se,  $N = N'$ .

Logo, do Teorema 2.27,  $d(M) = v_P(M) + v_C(M)$ . □

Notemos que, caso o emparelhamento  $M$  de  $G$  seja vazio, um caminho  $M$ -alternado  $P$  consiste de uma única aresta  $uv$ , cujos vértices  $u$  e  $v$  são  $M$ -insaturados, ou seja,  $P$  é um caminho  $M$ -bom do tipo  $cc$ . Portanto, de posse deste argumento, reobtemos o mesmo resultado do Corolário 4.2, ou seja,  $d(\emptyset) = |E|$ .

Para emparelhamentos que atendem à propriedade dada na definição que segue, é possível utilizar o Teorema 4.7 para obter os graus de tais através de uma fórmula mais direta.

**Definição 4.8.** *Um emparelhamento  $M = \{e_1, e_2, \dots, e_s\}$  não vazio de  $G$  é dito ser um emparelhamento sem vizinhos comuns se  $I(e_i) \cap I(e_j) = \emptyset$ , para  $1 \leq i, j \leq s$  e  $i \neq j$ .*

**Lema 4.9.** *Se  $M$  é um emparelhamento sem vizinhos comuns em um grafo  $G$ , então  $G$  não possui ciclo  $M$ -bom.*

*Demonstração.* Seja  $M$  um emparelhamento unitário de  $G$ . Neste caso,  $M \cap E(C)$  não é um emparelhamento perfeito de  $C$ , qualquer que seja o ciclo  $C$  de  $G$ . Portanto,  $G$  não possui ciclo  $M$ -bom.

Suponhamos agora que  $M$  é um emparelhamento de  $G$  com pelo menos duas arestas. Para  $1 \leq t \leq k$ , seja  $C = e_1 f_1 e_2 f_2 \dots e_t f_t$  um ciclo  $M$ -bom, com  $f_j \notin M$  e  $e_j \in M$ ,  $1 \leq j \leq t$ . Então,  $E(C) \cap M$  é um emparelhamento perfeito de  $C$  e, para algum  $i$ ,  $1 \leq i \leq t - 1$ ,  $e_i f_i e_{i+1}$  é um caminho. Portanto,  $\{f_i\} \subset I(e_i) \cap I(e_{i+1})$ , o que é uma contradição, pois  $M$  é um emparelhamento sem vizinhos comuns. Logo,  $G$  não possui ciclo  $M$ -bom. □

**Teorema 4.10.** Para todo emparelhamento  $M = \{e_i = u_i v_i \mid u_i, v_i \in V, 1 \leq i \leq s\}$  sem vizinhos comuns de um grafo  $G$ , seu grau é

$$d(M) = k + \sum_{i=1}^s (d(u_i)d(v_i) - |N(u_i) \cap N(v_i)|),$$

onde  $k \geq 0$  é o número de arestas de  $G$  que não incidem em  $u_i$  nem em  $v_j$ , para todo  $1 \leq i, j \leq s$ .

*Demonstração.* Seja  $M = \{e_i = u_i v_i \mid u_i, v_i \in V, 1 \leq i \leq s\}$  um emparelhamento sem vizinhos comuns no grafo  $G$ . Para calcular  $d(M)$ , do Teorema 4.7 e do Lema 4.9, é suficiente contar o número de caminhos  $M$ -bons. Além disso, como  $M$  é um emparelhamento sem vizinhos comuns, se  $P$  é um caminho  $M$ -bom (portanto,  $M$ -alternado), este possui no máximo uma aresta de  $M$ , ou seja,  $P$  tem comprimento igual a 1, 2 ou 3. Vamos encontrar o número de caminhos  $M$ -bons de cada tipo.

(1)  $P$  é do tipo  $oo \Leftrightarrow P = e$ , para  $e \in M$ . Portanto, há  $s$  caminhos  $M$ -bons do tipo  $oo$ .

(2)  $P$  é do tipo  $oc \Leftrightarrow P = ef$ , para  $e \in M$  e  $f \notin M$ . Assim, para cada aresta  $e_i = u_i v_i$  de  $M$ , há  $(d(u_i) - 1) + (d(v_i) - 1)$  caminhos  $M$ -bons deste tipo.

(3)  $P$  é do tipo  $cc \Leftrightarrow P = feg$  para  $e \in M$  e  $f, g \notin M$ ; ou  $P = f$ , sendo  $f \notin M$  e, se  $e \in G$  é adjacente a  $f$ , então  $e \notin M$ . No primeiro caso, para cada aresta  $e_i = u_i v_i \in M$ , há  $(d(u_i) - 1)(d(v_i) - 1) - |N(u_i) \cap N(v_i)|$  caminhos com tal propriedade. No segundo, há  $k$  possibilidades para tais caminhos.

Assim, dos itens (1), (2) e (3), obtemos

$$\begin{aligned} d(M) &= s + k + \sum_{i=1}^s [(d(u_i) - 1) + (d(v_i) - 1) + (d(u_i) - 1)(d(v_i) - 1) - |N(u_i) \cap N(v_i)|] = \\ &= k + \sum_{i=1}^s (d(u_i)d(v_i) - |N(u_i) \cap N(v_i)|). \end{aligned}$$

□

Observamos que, se  $M = \{e\}$ , tal que  $e = uv$  é um emparelhamento unitário de  $G$ , então  $M$  é um emparelhamento sem vizinhos comuns. Neste caso,  $d(M) = d(u)d(v) - |N(u) \cap N(v)| + k$ , onde  $k \geq 0$  é o número de arestas de  $G$  não incidentes nem em  $u$  e nem em  $v$ .

**Exemplo 4.11.** Reveja o grafo  $G$  da Figura 4.1 com o emparelhamento  $M = \{e_1, e_3, e_7\}$ . Note que  $M$  não é um emparelhamento sem vizinhos comuns. Portanto, para calcular  $d(M)$ , utilizaremos o Teorema 4.7. Temos neste caso os seguintes caminhos  $M$ -bons:

(1) Tipo  $oo$ :  $e_1$ ;  $e_3$ ;  $e_7$ ;  $e_1e_2e_3$ ;  $e_1e_4e_3$ .

(2) Tipo  $oc$ :  $e_3e_5$ ;  $e_6e_7$ ;  $e_7e_8$ ;  $e_1e_2e_3e_5$ .

(3) Tipo  $cc$ :  $e_6e_7e_8$ .

(4) Ciclo  $M$ -bom:  $e_1e_2e_3e_4$ .

Logo,  $d(M) = 11$ .

Dado que  $N = \{e_1, e_7\}$  é um emparelhamento sem vizinhos comuns, para calcular  $d(N)$  podemos utilizar o Teorema 4.10. Assim,  $d(N) = 2 + 4 + 4 = 10$ .

## 4.2 Grau mínimo

Para determinar o grau mínimo de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ , utilizaremos o resultado a seguir.

**Teorema 4.12.** *Seja  $G$  um grafo com dois emparelhamentos distintos  $M$  e  $N$ . Se  $M \subset N$ , então  $d(M) \leq d(N)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $M$  e  $N$  emparelhamentos distintos de  $G$  tais que  $M \subset N$ . Suponhamos primeiro que  $M$  e  $N$  diferem por uma aresta  $e = uv$ , ou seja,  $M = N \setminus \{e\}$ .

Sejam  $\mathbb{B}_M$  e  $\mathbb{B}_N$  os conjuntos de todos os caminhos e ciclos  $M$ -bons e  $N$ -bons de  $G$ , respectivamente. Do Teorema 4.7,  $d(M) = |\mathbb{B}_M|$  e  $d(N) = |\mathbb{B}_N|$ .

Vamos definir a função  $\varphi_e : \mathbb{B}_M \rightarrow \mathbb{B}_N$  da seguinte forma: para todo ciclo  $C \in \mathbb{B}_M$ ,  $\varphi_e(C) = C$  e, para todo caminho  $P \in \mathbb{B}_M$ ,

$$\varphi_e(P) = \begin{cases} P, & \text{se } e \in P; \\ P, & \text{se } e \notin P \text{ e, se } f \in P \text{ então } f \not\sim e; \\ P \cup \{e\}, & \text{se } e \notin P \text{ e, existe } f \in P \text{ tal que } f \sim e. \end{cases}$$

Notemos que, se  $e \notin P$  e existe  $f \in P$  tal que  $f \sim e$ , então  $f$  é uma aresta pendente de  $P$ , pois  $e \in N$  e  $P$  é  $N$ -alternado (uma vez que  $M \subset N$ ). Logo,  $P \cup \{e\}$  é de fato um caminho.

Por construção, a distintos caminhos e ciclos em  $\mathbb{B}_M$  correspondem distintos caminhos e ciclos em  $\mathbb{B}_N$ . Consequentemente, a função  $\varphi_e$  é injetiva e, portanto,  $d(M) \leq d(N)$ .

No caso geral, seja  $N \setminus M = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ . Definimos  $N_1 = M \cup \{e_1\}$ ;  $N_2 = M \cup \{e_1, e_2\}$ ;  $\dots$ ;  $N_k = N$ . Do que foi acima provado, temos que  $d(M) \leq d(N_1)$ ,  $d(N_1) \leq d(N_2)$ ,  $\dots$ ,  $d(N_{k-1}) \leq d(N)$ . Logo,  $d(M) \leq d(N)$ .  $\square$

**Corolário 4.13.** *O grau mínimo de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  é igual ao número de arestas  $m$  do grafo  $G$ .*

*Demonstração.* Seja  $M$  um emparelhamento de um grafo  $G$ . Se  $M = \emptyset$ , do Corolário 4.2,  $d(M) = m$ . Se  $M \neq \emptyset$ , do Teorema 4.12  $m \leq d(M)$ , pois  $\emptyset \subset M$ .  $\square$

Abreu et al. [6] provaram que, no caso de qualquer árvore  $T$ , os emparelhamentos com grau mínimo em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))$  são o vazio e aqueles que possuem somente arestas pendentes. Pode-se perguntar agora: quais são os emparelhamentos que possuem grau mínimo em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  quando  $G$  é um grafo arbitrário? Para responder a tal questão, introduzimos a definição a seguir.

**Definição 4.14.** *Uma aresta  $e = uv$  é dita ser um elo de um grafo  $G$  se  $d(u) = d(v) = 2$  e  $|N(u) \cap N(v)| = 1$ .*

**Exemplo 4.15.** Seja  $G$  o grafo da Figura 4.3. Temos que  $e_2$  é um elo e  $e_5$  é uma aresta pendente de  $G$ . Os emparelhamentos  $M = \{e_2\}$ ,  $M' = \{e_5\}$  e  $N = \{e_2, e_5\}$  são emparelhamentos sem vizinhos comuns. Portanto, do Teorema 4.10,  $d(M) = d(M') = d(N) = 5$ , que é igual ao número de arestas de  $G$ .

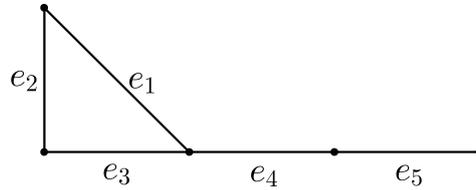


Figura 4.3:  $e_2$  é um elo e  $e_5$  é uma aresta pendente

**Proposição 4.16.** Seja  $e$  uma aresta entre as  $m$  arestas de um grafo  $G$ . Tem-se que  $d(\{e\}) = m$  se, e somente se,  $e$  é uma aresta pendente ou um elo de  $G$ .

*Demonstração.* Notemos inicialmente que, dada uma aresta  $e = uv$  de  $G$ , o número de arestas que não incidem nem em  $u$  e nem em  $v$  é  $m - (d(u) + d(v) - 1) = m - d(u) - d(v) + 1$ .

Suponhamos que  $d(\{e\}) = m$  e que  $|N(u) \cap N(v)| = t \geq 0$ . Do Teorema 4.10,  $d(u)d(v) - t = d(u) + d(v) - 1$ . Logo,  $(d(u) - 1)(d(v) - 1) = t$ . Como  $d(u) \geq t$  e  $d(v) \geq t$  segue que  $t = 0$  ou  $t = 1$ . Assim, há que considerarmos duas possibilidades para o valor de  $t$ :

- (1) Caso  $t = 0$ ,  $d(u) = 1$  ou  $d(v) = 1$ ;
- (2) Se  $t = 1$ , então  $d(u) = d(v) = 2$ .

De (1) e (2), tem-se que  $e$  é uma aresta pendente ou um elo de  $G$ .

Consideremos agora uma aresta  $e = uv$  pendente de  $G$ . Se, digamos,  $d(v) = 1$ , do Teorema 4.10,  $d(\{e\}) = d(u) - 0 + m - d(u) - 1 + 1 = m$ . Supondo, finalmente, que  $e$  é um elo de  $G$ ,  $d(u) = 2$ ,  $d(v) = 2$  e  $|N(u) \cap N(v)| = 1$ . Novamente do Teorema 4.10,  $d(\{e\}) = 4 - 1 + m - 2 - 2 + 1 = m$ .  $\square$

Como consequência do Teorema 4.12 e da Proposição 4.16, se  $G$  não tem arestas pendentes e nem elos,  $M = \emptyset$  é o único vértice do  $\text{EPE}(G)$  com grau mínimo.

Da Proposição 4.16, os emparelhamentos unitários de  $G$  formados por arestas pendentes ou elos possuem grau mínimo no  $\text{EPE}(G)$ . A partir daí, obtemos a seguinte caracterização para os vértices de grau mínimo em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ .

**Teorema 4.17.** Seja  $G$  um grafo com  $m$  arestas e  $M \neq \emptyset$  um emparelhamento de  $G$ . Então,  $d(M) = m$  se, e somente se,  $M$  possui somente arestas pendentes ou elos.

*Demonstração.* Seja  $M$  um emparelhamento não vazio de  $G$ . Se existe  $e \in M$  que não é pendente e não é um elo, da Proposição 4.16 e do Teorema 4.12,  $m < d(\{e\}) \leq d(M)$ .

Consequentemente,  $d(M) \neq m$ . Por contrapositiva, se  $d(M) = m$ , então toda aresta de  $M$  é pendente ou um elo de  $G$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $M$  seja um emparelhamento de  $G$  com  $s$  arestas, sendo estas todas pendentes ou elos. Dado um ciclo  $C$  de  $G$ , como  $M$  possui somente arestas pendentes ou elos,  $M \cap E(C)$  não é um emparelhamento perfeito de  $C$ , ou seja,  $G$  não possui ciclos  $M$ -bons. Seja  $N$  um emparelhamento de  $G$  tal que  $M \sim N$ . Dado que  $G$  não possui ciclos  $M$ -bons,  $M \Delta N$  é um caminho e como as arestas de  $M$  são pendentes ou elos, tal caminho possui no máximo três arestas. As possibilidades para estes caminhos serem  $M$ -bons são analisadas a seguir.

(1) Tipo *oo*: neste caso  $P = e$ ,  $e \in M$ , ou  $P = e_1 f e_2$ , com  $f \notin M$  e  $I(f) \cap M = \{e_1, e_2\}$ . No primeiro caso, existem  $s$  caminhos deste tipo; no segundo, há  $t_1$  possibilidades para  $P$ , onde  $t_1$  é o número de arestas de  $E(G) \setminus M$  com ambos vértices pendentes incidentes em arestas de  $M$ .

(2) Tipo *cc*: se  $P$  é do tipo *cc*, então  $P = f$ , com  $f \notin M$  e  $I(f) \cap M = \emptyset$ . Há  $t_2$  possibilidades para  $P$ , onde  $t_2$  é o número de arestas de  $E(G) \setminus M$  não adjacentes a qualquer aresta de  $M$ .

(3) Tipo *oc*: neste último caso,  $P = ef$ , com  $f \notin M$  e  $I(f) \cap M = \{e\}$ . Há  $t_3$  caminhos deste tipo, onde  $t_3$  é o número de arestas de  $E(G) \setminus M$  que possuem um único vértice incidente a alguma aresta de  $M$ .

De (1), (2) e (3), o número de caminhos  $M$ -bons é  $s + \sum_{i=1}^3 t_i = s + |E(G) \setminus M| = m$ . Do Teorema 4.7 segue que  $d(M) = m$ .  $\square$

Finalizamos esta seção com a caracterização dos grafos cujos EPEs são regulares. Para tal, precisamos do seguinte lema.

**Lema 4.18.** *Seja  $G$  um grafo com  $m$  arestas que decorre da união disjunta de estrelas ou triângulos. Para todo emparelhamento  $M$  de  $G$ , seu grau é  $d(M) = m$ .*

*Demonstração.* Suponhamos  $G$  um grafo nas condições do lema. Para  $M = \emptyset$ , o resultado segue do Corolário 4.2.

Por hipótese,  $G$  é uma união de  $r$  triângulos  $K_3$  e  $p$  estrelas  $S_{1,t_j}$ ,  $1 \leq j \leq p$ , ou seja,

$$G = rK_3 \bigcup_{j=1}^p S_{1,t_j}, \text{ onde } r, p \text{ e } t_j, 1 \leq j \leq p, \text{ satisfazem} \quad (4.1)$$

$$m = 3r + \sum_{j=1}^p t_j. \quad (4.2)$$

Como  $G$  é união disjunta de estrelas ou triângulos, as arestas de  $M$  pertencem a distintas componentes conexas de  $G$  e, portanto,  $M$  é um emparelhamento sem vizinhos comuns. A expressão 4.1 pode ser reescrita como

$$G = r_1 K_3 \bigcup_{j=1}^{p_1} S_{1,t_j} \cup r_2 K_3 \bigcup_{z=1}^{p_2} S_{1,t_z}, \quad (4.3)$$

onde  $r_1 + p_1$  é a cardinalidade de  $M$  e  $r_2 + p_2$  é o número de componentes conexas de  $G$  sem arestas de  $M$ . Assim, o número de arestas não adjacentes a qualquer aresta de  $M$  é

$$k = 3r_2 + \sum_{z=1}^{p_2} t_z. \quad (4.4)$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que as arestas de  $G$  se encontram ordenadas lexicograficamente de forma que  $M = \{e_1, e_2, \dots, e_{r_1+p_1}\}$ . Para cada  $e_i = u_i v_i \in M$ , denotemos  $s_i = d(u_i)(v_i) - |N(u_i) \cap N(v_i)|$ . Se  $e_i \in E(K_3)$ , então  $s_i = 3$ . Caso contrário,  $e_i \in E(S_{1,t_j})$  é uma aresta pendente de  $G$  e tem-se que  $s_i = t_j$ .

Como  $M$  é um emparelhamento sem vizinhos comuns, por 4.4 e aplicando o Teorema 4.10, obtemos

$$d(M) = (3r_2 + \sum_{z=1}^{p_2} t_z) + \sum_{i=1}^{r_1+p_1} s_i = 3(r_1 + r_2) + \sum_{j=1}^{p_1} t_j + \sum_{z=1}^{p_2} t_z. \quad (4.5)$$

Visto que  $r_1 + r_2 = r$  e  $p_1 + p_2 = p$ , utilizando (4.2), concluímos que  $d(M) = m$ .  $\square$

**Teorema 4.19.** *Um grafo  $G$  com  $m$  arestas é uma união disjunta de estrelas ou triângulos se, e somente se,  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  é um grafo  $m$ -regular.*

*Demonstração.* A condição de necessidade decorre imediatamente do Lema 4.18. Vamos então provar a condição de suficiência. Seja  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  um grafo  $m$ -regular. Então, para toda aresta  $e \in E(G)$ , temos que  $d(\{e\}) = d(\emptyset)$  e, do Corolário 4.2,  $d(\{e\}) = m$ . Da Proposição 4.16, isso ocorre somente se  $e$  é uma aresta pendente ou um elo de  $G$ . Logo, todas as arestas de  $G$  são pendentes ou elos, ou seja,  $G$  é união disjunta de estrelas ou triângulos.  $\square$

**Exemplo 4.20.** *Seja  $G = K_3 \cup S_{1,1}$  o grafo dado na Figura 4.4. Para o emparelhamento  $M_5 = \{e_1, e_2\}$ , temos:  $r = r_1 = 1$ ,  $r_2 = 0$ ,  $p = p_1 = 1$  e  $p_2 = 0$ . Além disso,  $k = 0$ ,  $s_1 = 1$  e  $s_2 = 3$ . Portanto,  $d(M) = k + s_1 + s_2 = 4$ .*

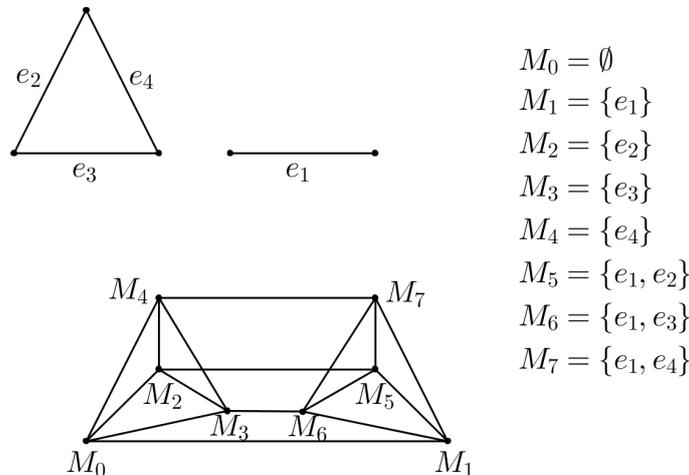


Figura 4.4:  $G = K_3 \cup S_{1,1}$  e  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_3 \cup S_{1,1}))$

# Capítulo 5

## Sobre o grau máximo

Neste capítulo, apresentamos alguns avanços relacionados ao cálculo do grau máximo do EPE de um grafo. Na Seção 5.1, dado um emparelhamento  $M$  de um grafo  $G$ , vamos particioná-lo em emparelhamentos de menor cardinalidade, com o objetivo de facilitar o cálculo do seu grau no grafo  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ . Para isso, introduzimos na Seção 5.2 uma partição no conjunto de arestas de  $G$ . Na Seção 5.3, vamos determinar o grau máximo dos EPEs de ciclos e grafos completos. Por fim, na Seção 5.4, exibimos dois limites inferiores para o grau máximo do EPE de um grafo.

### 5.1 Partição de um emparelhamento

Iniciamos esta seção definindo uma relação no conjunto de arestas de um emparelhamento  $M$ . Tal relação dará origem a uma partição em  $M$ , e esta será utilizada na seção seguinte para obtermos uma partição do conjunto de arestas de  $G$ .

**Definição 5.1.** *Seja  $M \neq \emptyset$  um emparelhamento de um grafo  $G$ . Dizemos que duas arestas  $f, g \in M$  estão bem relacionadas quando existe um caminho  $P$  em  $G$  (não necessariamente  $M$ -alternado) com todos os seus vértices  $M$ -saturados e cujas arestas pendentes são  $f$  e  $g$ . Notaremos  $f \approx g$  para designar que  $f$  e  $g$  são duas arestas bem relacionadas.*

Se  $f$  e  $g$  são duas arestas de um emparelhamento  $M$  e existe um caminho  $M$ -bom  $P$  tal que estas são arestas pendentes de  $P$ , então  $f \approx g$ . A recíproca não é verdadeira. Consideremos o emparelhamento  $M = \{e, f, g\}$  do grafo da Figura 5.1. Não existe um caminho  $M$ -bom com  $f$  e  $g$  pendentes. No entanto, o caminho  $P = fe_1e_2g$  possui todos os seus vértices saturados por arestas de  $M$  e, portanto,  $f \approx g$ .

Vejamos que esta relação é uma relação de equivalência em  $M$ :

- (1) Para toda aresta  $f \in M$ ,  $f \approx f$  pois o caminho  $P = f$  é  $M$ -bom;
- (2) Se  $f, g \in M$  são tais que  $f \approx g$ , então existe um caminho  $P$  em  $G$  contendo  $f$  e  $g$  como arestas pendentes e cujos vértices são  $M$ -saturados. Portanto,  $g \approx f$ ;

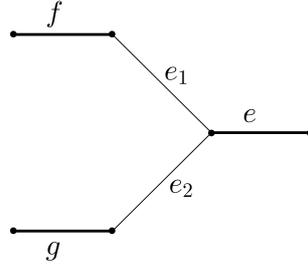


Figura 5.1: O caminho  $P = fe_1e_2g$  possui todos os vértices saturados por arestas de  $M$

(3) Se  $e, f, g \in M$  satisfazem  $e \approx f$  e  $f \approx g$ , existem caminhos  $P'$  e  $P''$  em  $G$  cujos vértices são  $M$ -saturados e tais que  $e$  e  $f$  são arestas pendentes de  $P'$ , enquanto  $f$  e  $g$  são arestas pendentes de  $P''$ . Considerando o conjunto de arestas e vértices de  $P'$  e de  $P''$ , obtemos um caminho  $\tilde{P}$ , de vértices  $M$ -saturados, tal que  $e$  e  $g$  são suas arestas pendentes. Logo,  $e \approx g$ .

A partição de  $M$  dada por esta relação de equivalência será denotada por  $\beta_M$ , ou seja,  $\beta_M = \{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ ,  $k \geq 1$ , onde  $M_i \cap M_j = \emptyset$ , se  $i \neq j$ , e  $\cup_{i=1}^k M_i = M$ . Vamos nos referir a  $\beta_M$  como a *partição bem relacionada* de  $M$ .

**Exemplo 5.2.** Seja  $G_1$  o grafo da Figura 5.2. Para o emparelhamento  $M = \{e_1, e_4, e_6, e_{13}\}$ ,  $\beta_M = \{M_1, M_2, M_3\}$ , sendo  $M_1 = \{e_1, e_6\}$ ,  $M_2 = \{e_4\}$  e  $M_3 = \{e_{13}\}$ . Já para o emparelhamento  $M' = \{e_1, e_4\}$ ,  $\beta_{M'} = \{M_1, M_2\}$ , onde  $M_1 = \{e_1\}$  e  $M_2 = \{e_4\}$ .

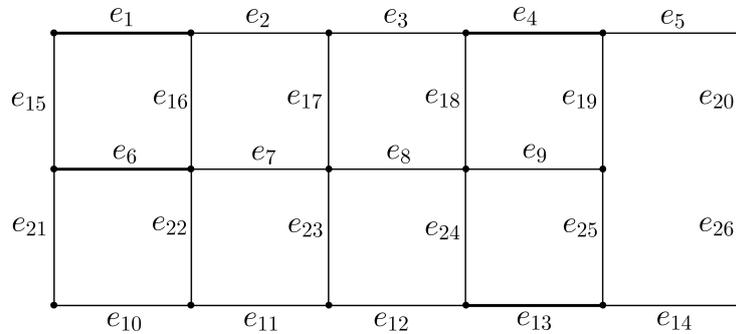


Figura 5.2: O grafo  $G_1$  e o emparelhamento  $M$

Consideremos agora o grafo  $G_2$  da Figura 5.3 com o emparelhamento  $N = \{e_4, e_6, e_9\}$ . A partição  $\beta_N$  é dada pelos seguintes subconjuntos de  $N$ :  $N_1 = \{e_4, e_6\}$  e  $N_2 = \{e_9\}$ . Já para o emparelhamento  $N' = \{e_4, e_6\}$  de  $G_2$ , temos que  $\beta_{N'} = \{N'\}$ .

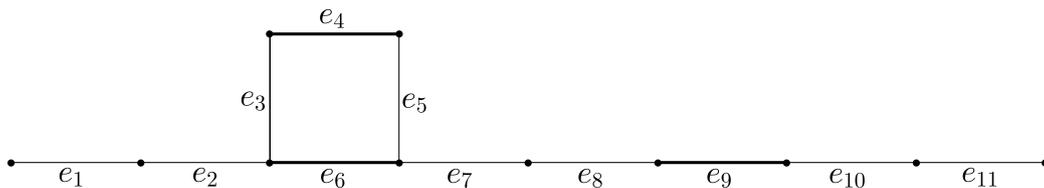


Figura 5.3: O grafo  $G_2$  e o emparelhamento  $N$

## 5.2 Partição do conjunto de arestas de um grafo

Dado um emparelhamento  $M$  de uma árvore  $T$ , dizemos que um vértice  $v \in V(T)$  é  $M$ -insaturado interno se  $v$  não é pendente, não é isolado e é  $M$ -insaturado (veja a Definição 2.37). Abreu et al. [6] mostraram que se  $M$  é um emparelhamento de uma árvore  $T$  e  $v$  é um vértice  $M$ -insaturado interno de  $T$ , então  $d(M)$  pode ser calculado via emparelhamentos de menor cardinalidade, pertencentes a certas subárvores de  $T$  (veja a Proposição 2.39). Nesta seção vamos introduzir uma partição no conjunto de arestas de um grafo que nos permitirá generalizar este resultado para um grafo qualquer.

**Lema 5.3.** *Seja  $M \neq \emptyset$  um emparelhamento de um grafo  $G$ . Para  $k \geq 1$ , se  $\beta_M = \{M_1, \dots, M_k\}$  é a partição bem relacionada de  $M$ , então os subconjuntos*

$$E_i = M_i \cup \left( \bigcup_{e \in M_i} I(e) \right), \quad 1 \leq i \leq k, \quad e$$

$$E_{k+1} = E(G) \setminus \left( \bigcup_{i=1}^k E_i \right)$$

*formam uma partição do conjunto de arestas de  $G$ .*

*Demonstração.* Sejam  $E(G)$  o conjunto das arestas de um grafo  $G$  e  $M \neq \emptyset$  um emparelhamento de  $G$  com a partição  $\beta_M = \{M_1, \dots, M_k\}$ ,  $k \geq 1$ . Facilmente verifica-se que  $E(G) = \bigcup_{i=1}^{k+1} E_i$ . Também é fácil notar que  $E_{k+1}$  é disjunto dos demais  $E_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Assim, para provarmos que  $\{E_1, \dots, E_{k+1}\}$  forma uma partição de  $E(G)$ , falta verificar que os conjuntos  $E_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , são mutuamente disjuntos.

Suponhamos que  $1 \leq i < j \leq k$  e  $E_i \cap E_j = \{g\}$ . Como  $g \in E_i$ ,  $g \in M_i$  ou  $g \in I(e)$ , para uma aresta  $e \in M_i$ . Da mesma forma,  $g \in M_j$  ou  $g \in I(f)$ , para uma aresta  $f \in M_j$ .

Sendo  $\beta_M$  uma partição de  $M$ , os subconjuntos  $M_i$  e  $M_j$  são disjuntos. Assim, basta analisarmos as possibilidades:

(1)  $g \in M_i$  e  $g \in I(f)$ , para  $f \in M_j$ : neste caso, as duas arestas  $g$  e  $f$  pertenceriam a  $M$  e  $g \in I(f)$ , o que é impossível;

(2)  $g \in I(e) \cap I(f)$ , para  $e \in M_i$  e  $f \in M_j$ : se isso ocorresse, o caminho  $egf$  seria  $M$ -bom, pois  $e, f \in M$ , e portanto as arestas  $e$  e  $f$  estariam bem relacionadas. Isso seria uma contradição, pois  $e$  e  $f$  pertencem a classes distintas da partição  $\beta_M$ .

Logo, em qualquer caso chegamos a uma contradição e concluímos que  $E_i \cap E_j = \emptyset$ , se  $i \neq j$ . □

Seja  $M \neq \emptyset$  um emparelhamento de  $G$ . Chamaremos a partição de  $E(G)$  dada no lema anterior de *partição  $M$ -boa*. Ainda, denotaremos por  $B_i$  o subgrafo de  $G$  induzido por  $E_i$ ,  $1 \leq i \leq k+1$ .

Observamos que, se  $M$  é um emparelhamento maximal de um grafo  $G$  e  $\{E_1, \dots, E_{k+1}\}$ ,  $k \geq 1$ , é a partição  $M$ -boa de  $E(G)$ , então  $E_{k+1} = \emptyset$ . De fato, dada uma aresta  $f \in E(G) \setminus M$ , existe  $e \in M$  tal que  $f \in I(e)$ , pois caso contrário  $M \cup \{f\}$  seria um emparelhamento, o que é impossível pois  $M$  é maximal.

**Exemplo 5.4.** Retornemos aos grafos  $G_1$  e  $G_2$  do Exemplo 5.2, dados nas figuras 5.2 e 5.3. Para o emparelhamento  $M = \{e_1, e_4, e_6, e_{13}\}$  de  $G_1$ , obtemos os subgrafos  $B_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , vistos na Figura 5.4, tais que:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{e_1, e_2, e_6, e_7, e_{15}, e_{16}, e_{21}, e_{22}\}; \\ E_2 &= \{e_3, e_4, e_5, e_{18}, e_{19}\}; \\ E_3 &= \{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{24}, e_{25}\}; \\ E_4 &= \{e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{17}, e_{20}, e_{23}, e_{26}\}. \end{aligned}$$

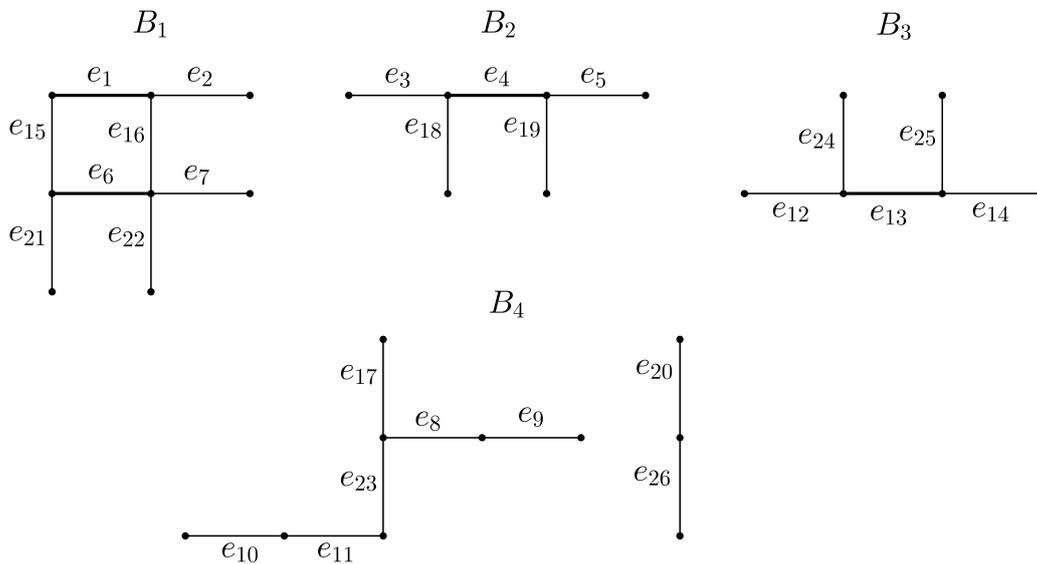


Figura 5.4: Subgrafos  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  e  $B_4$  do grafo  $G_1$  da Figura 5.2

Para o emparelhamento  $N = \{e_4, e_6, e_9\}$  do grafo  $G_2$ , os subgrafos são  $B_1$ ,  $B_2$  e  $B_3$ , onde  $E_1 = \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ ,  $E_2 = \{e_8, e_9, e_{10}\}$  e  $E_3 = \{e_1, e_{11}\}$ .

**Exemplo 5.5.** Consideremos o emparelhamento  $M = \{e_2, e_4\}$  do grafo  $G$  da Figura 5.5. A partição  $\beta_M$  tem uma única classe, que é o próprio  $M$ . Como  $M$  é maximal, todas as arestas de  $E(G) \setminus M$  são adjacentes a arestas de  $M$ . Assim, a partição  $M$ -boa de  $E(G)$  também tem uma única classe, que é o próprio conjunto  $E(G)$ .

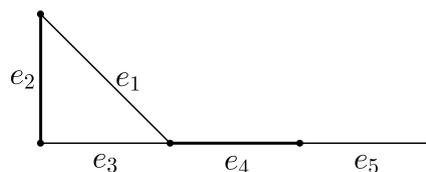


Figura 5.5: Para  $M = \{e_2, e_4\}$ ,  $E_{k+1} = \emptyset$

A seguir provamos que, dado um emparelhamento não vazio  $M$  de um grafo  $G$ , os subgrafos  $B_i$ , para  $1 \leq i \leq k$ , obtidos pela partição  $M$ -boa de  $E(G)$  são conexos (o subgrafo  $B_{k+1}$  pode ser desconexo, como acontece no Exemplo 5.4 com o subgrafo  $B_4$ ). Além disso, mostramos que um caminho que possua pelo menos uma aresta de  $M$  é  $M$ -alternado se, e somente se, é  $M_i$ -alternado, para algum  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Tal resultado será utilizado para provar o teorema subsequente, que é o principal resultado desta seção.

**Proposição 5.6.** *Seja  $M \neq \emptyset$  um emparelhamento de um grafo  $G$ . Dada a partição  $\beta_M = \{M_1, \dots, M_k\}$  de  $M$ , seja  $\{E_1, \dots, E_{k+1}\}$  a partição  $M$ -boa de  $G$ . Para cada  $1 \leq i \leq k+1$ , seja  $B_i$  o subgrafo de  $G$  induzido por  $E_i$ . Então:*

- i) Para  $1 \leq i \leq k$ , se  $f, g \in M_i$ , existe um caminho  $P$  em  $B_i$  com  $f$  e  $g$  como arestas pendentes. Consequentemente,  $B_i$  é um grafo conexo, para todo  $1 \leq i \leq k$ ;*
- ii) Um caminho  $P$  (ou, ciclo  $C$ ) que possua pelo menos uma aresta de  $M$  é  $M$ -alternado se, e somente se, é  $M_i$ -alternado, para algum  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Neste caso,  $P \subset B_i$  (ou,  $C \subset B_i$ );*
- iii) Para todo  $1 \leq i \leq k$ ,  $M_i$  é emparelhamento maximal de  $B_i$ .*

*Demonstração.* (i) Se  $f$  e  $g$  são duas arestas de  $M_i$ , então tais arestas estão bem relacionadas, ou seja, existe um caminho  $P$  em  $G$  com  $f$  e  $g$  como arestas pendentes e tal que todo vértice de  $P$  é saturado por  $M$ . Se  $e$  é uma outra aresta de  $P$  que pertence a  $M$ , então  $e \approx f$ , donde  $e \in M_i$ . Se  $e$  é uma aresta de  $P$  que não pertence a  $M$ , como os vértices de  $e$  são  $M$ -saturados,  $e \in I(e')$ , para alguma aresta  $e' \in M$ . Uma vez que existe um caminho, com arestas de  $P$ , tendo  $f$  e  $e$  como arestas pendentes, irá existir um caminho, de vértices  $M$ -saturados, tendo  $f$  e  $e'$  como arestas pendentes. Donde,  $e' \approx f$ , ou seja,  $e' \in M_i$ . Sendo  $B_i$  o subgrafo induzido por  $E_i = M_i \cup (\cup_{e \in M_i} I(e))$ , obtemos que  $P$  é um caminho em  $B_i$ .

Como qualquer aresta de  $E_i \setminus M_i$  é adjacente a uma aresta de  $M_i$ , obtemos que  $B_i$  é um grafo conexo.

(ii) Suponhamos que  $P$  seja um caminho (ou, ciclo)  $M$ -alternado contendo uma aresta  $f$  de  $M$ . Então,  $f \in M_i$ , para algum  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Se  $g$  é outra aresta de  $P$  que pertence a  $M$ , então existe um caminho  $M$ -bom  $P'$  contido em  $P$  com  $f$  e  $g$  como arestas pendentes (pois  $P$  é  $M$ -alternado), donde  $f \approx g$ , isto é,  $g \in M_i$ . Logo,  $P$  é um caminho (ou, ciclo)  $M_i$ -alternado e toda aresta de  $P$  é uma aresta de  $M_i$  ou adjacente a uma aresta de  $M_i$ . E isto implica que  $P$  é um caminho (ou, ciclo) de  $B_i$ . A recíproca é imediata, visto que  $M_i \subset M$ .

(iii) Suponhamos que para algum  $i \in \{1, \dots, k\}$ , o emparelhamento  $M_i$  não seja maximal em  $B_i$ . Então existe uma aresta  $f \in E_i \setminus M_i$  tal que  $f \notin I(e)$ ,  $\forall e \in M_i$ . Mas isto não é possível, pela definição dos conjuntos  $E_i$ .  $\square$

**Teorema 5.7.** *Dado um emparelhamento  $M \neq \emptyset$  de um grafo  $G$ , seja  $\beta_M = \{M_1, \dots, M_k\}$ ,  $k \geq 1$ , a partição bem relacionada de  $M$ , e seja  $\{E_1, \dots, E_{k+1}\}$  a partição  $M$ -boa do grafo. Para cada  $1 \leq i \leq k+1$ , considere o subgrafo  $B_i$  de  $G$  induzido por  $E_i$ . Tem-se que*

$$d(M) = |E_{k+1}| + \sum_{i=1}^k d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(B_i))}(M_i).$$

*Demonstração.* Dado um emparelhamento  $M \neq \emptyset$  do grafo  $G$ , do Teorema 4.7,  $d(M)$  é igual ao número de caminhos e ciclos  $M$ -bons do grafo.

Da Proposição 5.6, um ciclo de  $G$  é  $M$ -bom se, e somente se, for um ciclo  $M_i$ -bom de  $B_i$ , para algum  $1 \leq i \leq k$ . Portanto, o número de ciclos  $M$ -bons do grafo é igual à soma do número de ciclos  $M_i$ -bons de  $B_i$ , para  $1 \leq i \leq k$ .

Para calcular o número de caminhos  $M$ -bons do grafo, iremos considerar primeiro o caso em que um tal caminho  $P$  não possui aresta de  $M$ . Neste caso,  $P$  é  $M$ -bom do tipo  $cc$ , formado por uma única aresta de  $E_{k+1}$ . Assim, existem exatamente  $|E_{k+1}|$  tais caminhos. Os demais caminhos  $M$ -bons do grafo possuem uma aresta  $e \in M_i$ , para algum  $1 \leq i \leq k$ . Novamente, da Proposição 5.6, segue que estes caminhos são  $M_i$ -alternados e estão contidos em  $B_i$ . Falta verificar que tais caminhos  $P$  são  $M_i$ -bons:

Caso  $P$  não seja  $M_i$ -bom, existe uma aresta pendente  $f$  de  $P$  que não pertence a  $M_i$ , cujo vértice pendente  $v$  é  $M_i$ -saturado. Como  $M_i \subset M$ , o vértice  $v$  é  $M$ -saturado. Por outro lado, sendo  $P \subset B_i$ ,  $f \in M$  implicaria em  $f \in M_i$ . Logo,  $f \notin M$ , o que contradiz o fato de  $P$  ser  $M$ -bom.

Reciprocamente, da Proposição 5.6, todo caminho  $P$   $M_i$ -bom de  $B_i$  é um caminho  $M$ -alternado do grafo. Do Lema 5.3, nenhuma aresta de  $P$  pode ser adjacente a alguma aresta de  $M_j$ , para  $1 \leq j \leq k$  e  $j \neq i$ . Logo, se um vértice de  $P$  for  $M_i$ -insaturado, este será também  $M$ -insaturado. Sendo  $P$   $M_i$ -bom e  $M \subset M_i$ ,  $P$  será  $M$ -bom.

Deste modo, obtemos que o número de caminhos  $M$ -bons do grafo é igual ao número de arestas de  $E_{k+1}$  somado ao número de caminhos  $M_i$ -bons de  $B_i$ , para  $1 \leq i \leq k$ , o que finaliza a prova.  $\square$

**Exemplo 5.8.** *No grafo da Figura 5.6, considere o emparelhamento  $M = \{e_2, e_4, e_8, e_{10}\}$ . A partição bem relacionada de  $M$ ,  $\beta_M = \{M_1, M_2\}$ , com  $M_1 = \{e_2, e_4\}$  e  $M_2 = \{e_8, e_{10}\}$ , determina a partição  $M$ -boa de  $E(G)$  dada por  $E_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ ,  $E_2 = \{e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}\}$  e  $E_3 = \{e_6\}$ . Os subgrafos induzidos por  $E_1, E_2$  e  $E_3$  são, respectivamente,  $B_1 = B_2 = C_5$  e  $B_3 = P_2 = e_6$ . Contando o número de caminhos  $M_1$ -bons e  $M_2$ -bons em  $C_5$ , pode-se verificar que  $d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_5))}(M_1) = d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_5))}(M_2) = 7$ . Portanto, do Teorema 5.7, obtemos*

$$d(M) = |E_3| + \sum_{i=1}^2 d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_5))}(M_i) = 15.$$

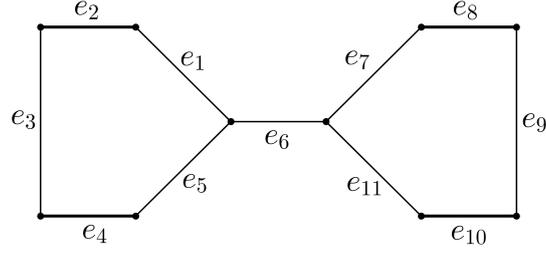


Figura 5.6: Partição  $M$ -boa

Seja  $P_n$  o caminho com  $n$  vértices. Conforme visto no Teorema 2.48, o grau máximo do esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_n))$  é dado por

$$\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_n))) = \begin{cases} \frac{n^2+4n-5}{8}, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \frac{n^2+6n-8}{8}, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases} \quad (5.1)$$

Para  $n \geq 2$  par e  $P_n = e_1e_2\dots e_{n-1}$ , vamos chamar o emparelhamento  $M = \{e_2, e_4, e_6, \dots, e_{n-2}\}$  de *emparelhamento principal* de  $P_n$ . Notemos que, se  $N$  é emparelhamento perfeito de  $P_n$ , então o único emparelhamento principal de  $P_n$  é  $M = E(P_n) \setminus N$ .

Para  $n$  par, se  $M$  é um emparelhamento perfeito ou um emparelhamento principal de  $P_n$ , então  $M$  possui grau máximo em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_n))$ . O resultado dado pela Proposição 2.49 é equivalente a isso. Vejamos no lema a seguir que um emparelhamento principal sempre possui grau máximo no respectivo  $EPE(P_n)$ .

**Lema 5.9.** *Seja  $P_n = e_1e_2\dots e_{n-1}$ ,  $n$  par. O emparelhamento principal  $M = \{e_2, e_4, \dots, e_{n-2}\}$  possui grau máximo em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_n))$ .*

*Demonstração.* Sejam  $n$  par,  $P_n = e_1e_2\dots e_{n-1}$  e  $M = \{e_2, e_4, \dots, e_{n-2}\}$  o emparelhamento principal de  $P_n$ . Consideremos os emparelhamentos  $M_1 = \{e_2\}$ ,  $M_2 = \{e_2, e_4\}$ ,  $M_3 = \{e_2, e_4, e_6\}$ ,  $\dots, M_{\frac{n-2}{2}} = M$ .

Do Teorema 4.10,  $d(M_1) = (n-1-3) + 4 - 0 = n$ .

Comparando os emparelhamentos  $M_1 = \{e_2\}$  e  $M_2 = \{e_2, e_4\}$ , observamos:

- caminhos  $M_1$ -bons que não incidem na aresta  $e_4$  são  $M_2$ -bons;
- o caminho de uma única aresta  $e_4$  é  $M_1$ -bom do tipo  $cc$  e, também,  $M_2$ -bom do tipo  $oo$ ;
- caminhos  $M_1$ -bons que incidem em  $e_4$  não são  $M_2$ -bons, a saber:  $e_1e_2e_3$ ,  $e_2e_3$  e  $e_5$ ;
- caminhos  $M_2$ -bons que contêm  $e_4$  (com exceção do próprio  $e_4$ ) não são  $M_1$ -bons:  $e_1e_2e_3e_4$ ,  $e_1e_2e_3e_4e_5$ ,  $e_2e_3e_4$ ,  $e_2e_3e_4e_5$  e  $e_4e_5$ .

Portanto,  $d(M_2) = d(M_1) - 3 + 5 = n + 2$ .

Analogamente, ao compararmos  $M_2$  com  $M_3$ , obtemos  $d(M_3) = (n+2) + 3$ .

Sejam  $M_i = \{e_2, e_4, \dots, e_{2i}\}$  e  $M_{i+1} = \{e_2, e_4, \dots, e_{2i}, e_{2i+2}\}$ ,  $1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}$ . Como anteriormente, temos:

- caminhos  $M_i$ -bons que não incidem na aresta  $e_{2i+2}$  são  $M_{i+1}$ -bons;

- o caminho de uma única aresta  $e_{2i+2}$  é  $M_i$ -bom do tipo  $cc$  e, também,  $M_{i+1}$ -bom do tipo  $oo$ ;

- caminhos  $M_i$ -bons que incidem em  $e_{2i+2}$  não são  $M_{i+1}$ -bons:  $e_1e_2 \dots e_{2i+1}$ ,  $e_2 \dots e_{2i+1}$ ,  $e_4 \dots e_{2i+1}$ ,  $\dots$ ,  $e_{2i}e_{2i+1}$  e  $e_{2i+2}e_{2i+3}$ . Perfazendo  $i+2$  caminhos;

- caminhos  $M_{i+1}$ -bons que contêm  $e_{2i+2}$  (com exceção do próprio  $e_{2i+2}$ ) não são  $M_i$ -bons:  $e_1e_2 \dots e_{2i+2}$ ,  $e_1e_2 \dots e_{2i+2}e_{2i+3}$ ,  $e_2 \dots e_{2i+2}$ ,  $e_2 \dots e_{2i+2}e_{2i+3}$ ,  $\dots$ ,  $e_{2i}e_{2i+1}e_{2i+2}$ ,  $e_{2i}e_{2i+1}e_{2i+2}e_{2i+3}$  e  $e_{2i+2}e_{2i+3}$ . Totalizando  $2i+3$  caminhos.

Como  $(2i+3) - (i+2) = i+1$ , obtemos que  $d(M_{i+1}) = d(M_i) + (i+1)$ .

Logo,

$$d(M) = n + 2 + 3 + \dots + \frac{n-2}{2} = n + \frac{n^2 - 2n - 8}{8} = \frac{n^2 + 6n - 8}{8}.$$

De (5.1),  $d(M) = \Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_n)))$ . □

Notemos que, dado um emparelhamento  $M$  de um grafo  $G$ , se um caminho  $P$  de  $G$  possui pelo menos uma aresta de  $M$  e é  $M$ -bom do tipo  $cc$ , então  $M \cap E(P)$  é um emparelhamento principal de  $P$ .

Se um emparelhamento  $M$  de  $P_n$  é vazio ou possui somente arestas pendentes, do Teorema 4.17,  $d(M) = n - 1$ . Vejamos uma forma de calcular o grau de um emparelhamento que possui pelo menos uma aresta não pendente.

**Proposição 5.10.** *Para  $n \geq 4$ , sejam  $M \neq \emptyset$  um emparelhamento do caminho  $P_n$  e  $\{E_1, E_2, \dots, E_{k+1}\}$  a partição  $M$ -boa de  $E(P_n)$ . Se  $M$  possui uma aresta não pendente de  $P_n$  então, para todo  $1 \leq i \leq k$ , o subgrafo  $B_i$  induzido por  $E_i$  é um caminho  $P_{n_i}$  contido em  $P_n$ , para algum  $n_i$  par,  $4 \leq n_i \leq n$ . Além disso, o grau de  $M$  é dado por*

$$d(M) = |E_{k+1}| + \sum_{i=1}^k \frac{n_i^2 + 6n_i - 8}{8}.$$

*Demonstração.* Seja  $M \neq \emptyset$  um emparelhamento de  $P_n$  que possui pelo menos uma aresta não pendente. Para calcular  $d(M)$ , da Proposição 2.41, podemos supor que  $M$  não contém aresta pendente. Consideremos a partição  $M$ -boa do grafo dada por  $\{E_1, \dots, E_{k+1}\}$ ,  $k \geq 1$ . Para  $1 \leq i \leq k+1$ , seja  $B_i$  o subgrafo induzido por  $E_i$ . Da Proposição 5.6, se  $1 \leq i \leq k$ , então  $B_i$  é subgrafo conexo de  $P_n$  e, portanto, é um caminho  $P_{n_i}$ , para algum  $4 \leq n_i \leq n$ . Para concluir que  $n_i$  é par, provaremos que  $P_{n_i}$  é um caminho  $M_i$ -bom do tipo  $cc$ .

1)  $P_{n_i}$  é  $M_i$ -alternado: suponhamos por contradição que  $P_{n_i} = e \dots fg \dots e'$ , com  $f, g \notin M_i$ . Como  $f, g \in E_i$ , existem arestas  $f_1, g_1 \in M_i$  tais que  $f \in I(f_1)$  e  $g \in I(g_1)$  (veja a Figura 5.7). Neste caso não existe um caminho em  $P_n$  com  $f_1$  e  $g_1$  como arestas pendentes e todos os seus vértices saturados por  $M$ , o que é uma contradição pois  $f_1 \approx g_1$ . Logo,  $P_{n_i}$  é um caminho  $M_i$ -alternado.



**Proposição 5.12.** *Para todo grafo  $G$ , existe um emparelhamento maximal de  $G$  que possui grau máximo em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ .*

*Demonstração.* Seja  $M$  um emparelhamento de  $G$  que possui grau máximo em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ . Podemos adicionar arestas a  $M$  (caso este não seja maximal) até obtermos um emparelhamento  $N$  maximal. Do Teorema 4.12,  $d(M) \leq d(N)$ . Por outro lado,  $d(N) \leq \Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))) = d(M)$ . Logo,  $N$  é um emparelhamento maximal de  $G$  que possui grau máximo em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ .  $\square$

**Proposição 5.13.** *Seja  $G$  um grafo com um emparelhamento  $N$ . Se  $e$  é uma aresta pendente ou um elo de  $G$  tal que  $M = N \cup \{e\}$  seja também um emparelhamento, então  $d(M) = d(N)$ .*

*Demonstração.* Seja  $e$  uma aresta pendente ou um elo e  $M = N \cup \{e\}$  um emparelhamento de  $G$ . Do Teorema 4.12, temos que  $d(N) \leq d(M)$ . Assim, para ver que  $d(M) = d(N)$ , é suficiente mostrar que  $d(M) \leq d(N)$ . Do Teorema 4.7, basta verificar que a todo caminho  $M$ -bom (respectivamente, a todo ciclo  $M$ -bom) corresponde um único caminho  $N$ -bom (ciclo  $N$ -bom).

Se  $C$  é um ciclo  $M$ -bom, então  $C$  é um ciclo par de  $G$  e, portanto,  $e \notin E(C)$ . Logo,  $C$  é também  $N$ -bom.

Se  $P$  é um caminho  $M$ -bom e  $e \notin P$ , então  $P$  é  $N$ -bom. Suponhamos que  $e \in P$ . Notemos que, sendo  $e$  pendente ou elo,  $e$  é uma aresta pendente de  $P$ .

1) Se  $P = e$ , então  $P$  é  $N$ -bom do tipo  $cc$ .

2) Se  $P = ee_1 \dots e_k$ , com  $k \geq 1$ , então  $e_1$  não é aresta de  $N$  e  $P' = e_1 \dots e_k$  é  $N$ -bom do tipo  $cc$  ou  $co$ . Notemos que  $P'$  não é  $M$ -bom, pois a aresta  $e \in M$  e é adjacente a  $e_1$ .

Assim, a distintos ciclos e caminhos  $M$ -bons correspondem distintos ciclos e caminhos  $N$ -bons. Logo,  $d(M) = d(N)$ .  $\square$

Lembramos que um emparelhamento  $M$  de um grafo é quase perfeito se o grafo possui um único vértice  $M$ -insaturado. Note que, se  $C_n$  possui um emparelhamento quase perfeito, então  $n$  é necessariamente ímpar.

Os lemas a seguir apresentados serão utilizados no cálculo do grau máximo dos esqueletos dos politopos de emparelhamentos dos ciclos. Para provar o primeiro lema, utilizaremos a partição  $M$ -boa de  $E(C_n)$ . Como já observamos antes, se  $M$  é um emparelhamento maximal de  $C_n$  e  $\{E_1, \dots, E_{k+1}\}$ ,  $k \geq 1$ , é a partição  $M$ -boa de  $E(C_n)$ , então  $E_{k+1} = \emptyset$ .

**Lema 5.14.** *Para  $n \geq 4$ , sejam  $M$  um emparelhamento maximal do ciclo  $C_n$  e  $\{E_1, \dots, E_{k+1}\}$  a partição  $M$ -boa de  $E(C_n)$ . Se  $n$  é par mas  $M$  não é um emparelhamento perfeito ou, se  $n$  é ímpar mas  $M$  não é um emparelhamento quase perfeito, então:*

- i) Para cada  $1 \leq i \leq k$ ,  $B_i$  é igual a  $P_{n_i}$ , e este é um caminho  $M_i$ -bom do tipo  $cc$ ;
- ii) Além disso,  $k \leq \frac{n}{3}$  e  $\sum_{i=1}^k (n_i - 1) = n$ .

*Demonstração.* Para  $n \geq 4$ , seja  $M$  um emparelhamento maximal de  $C_n$  e  $\{E_1, \dots, E_{k+1}\}$  a partição  $M$ -boa de  $E(C_n)$ . Suponhamos que  $k = 1$ , ou seja, a partição  $M$ -boa é dada por  $E_1 = E(C_n)$ , pois sendo  $M$  maximal,  $E_2 = \emptyset$ . Neste caso, todas as arestas estão bem relacionadas entre si e  $B_1$  é o próprio  $C_n$ . Se  $n$  é par e  $M$  não é perfeito ou, se  $n$  é ímpar e  $M$  não é quase perfeito, então  $C_n$  possui pelo menos dois vértices  $M$ -insaturados  $u$  e  $v$ . Tais vértices dividem  $C_n$  em dois caminhos  $H_1$  e  $H_2$ : sendo  $C_n$  conexo e assumindo que os vértices de  $C_n$  estão ordenados lexicograficamente, seja  $H_1$  o caminho de  $C_n$  que inicia no vértice  $u$  e termina no vértice  $v$ ; o caminho  $H_2$  será o subgrafo de  $C_n$  induzido pelas arestas de  $E(C_n) \setminus E(H_1)$  (veja a Figura 5.9). Cada  $H_i$ ,  $i = 1, 2$ , é um caminho (possui pelo menos uma aresta) cujos vértices pendentes  $u$  e  $v$  são  $M$ -insaturados. Se, digamos,  $M \cap E(H_1) = \emptyset$ , então  $M \cup \{e\}$ , para  $e \in E(H_1)$ , é um emparelhamento de  $C_n$ , contradizendo o fato de  $M$  ser um emparelhamento maximal de  $C_n$ . Logo, existem  $f \in M \cap E(H_1)$  e  $g \in M \cap E(H_2)$ . Novamente, por  $u$  e  $v$  serem  $M$ -insaturados, não existe um caminho  $P$  com  $f$  e  $g$  como arestas pendentes e com todos os seus vértices saturados por  $M$ , o que é uma contradição pois  $f \approx g$ . Logo,  $k \geq 2$ .

Da Proposição 5.6, para  $1 \leq i \leq k$ ,  $B_i$  é um subgrafo conexo de  $C_n$  e, portanto, é um caminho  $P_{n_i}$ . Com argumentos análogos aos utilizados na Proposição 5.10, concluímos que  $P_{n_i}$  é um caminho  $M_i$ -bom do tipo  $cc$ , para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

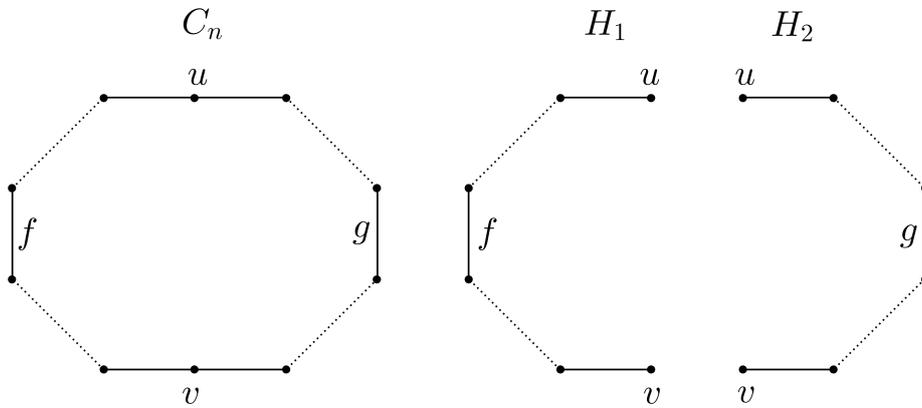


Figura 5.9:  $C_n$  com pelo menos dois vértices  $M$ -insaturados

Como  $P_{n_i}$  possui  $n_i - 1$  arestas e  $\cup_{i=1}^k E(P_{n_i}) = E(C_n)$ , obtemos que  $\sum_{i=1}^k (n_i - 1) = n$ .

Finalmente, suponhamos por contradição que a partição  $M$ -boa tenha  $k$  classes não vazias  $E_1, \dots, E_k$ , para  $k > n/3$ . Como  $P_{n_i}$  é um caminho  $M_i$ -bom do tipo  $cc$  que possui pelo menos uma aresta de  $M$ , cada um desses caminhos possui pelo menos 3 arestas. Assim, se  $k > n/3$ , então  $3k > n$ , o que é impossível. Logo,  $k \leq n/3$ .  $\square$

**Lema 5.15.** *Seja  $n \geq 3$  e  $C_n$  um ciclo ímpar. Se  $M$  é um emparelhamento quase perfeito de  $C_n$ , então*

$$d(M) = \frac{n^2 + 8n - 9}{8}.$$

*Demonstração.* Seja  $C_n = e_1e_2 \dots e_n$ ,  $n$  ímpar. Sem perda de generalidade, suponhamos que  $M = \{e_1, e_3, e_5, \dots, e_{n-2}\}$ . Não existem ciclos  $M$ -bons, pois  $C_n$  não possui ciclo par. Além disso,  $C_n$  não possui caminhos  $M$ -bons do tipo  $cc$ , pois há somente um vértice  $M$ -insaturado no ciclo. Vamos encontrar o número de caminhos  $M$ -bons dos tipos  $oc$  e  $oo$ :

1) Para os caminhos  $M$ -bons do tipo  $oc$  temos duas possibilidades:

Caminhos começando em  $e_n$ :  $e_n e_1$ ;  $e_n e_1 e_2 e_3$ ;  $\dots$ ;  $e_n e_1 e_2 \dots e_{n-2}$ . Perfazendo  $\frac{n-1}{2}$  caminhos;

Caminhos começando em  $e_{n-1}$ :  $e_{n-1} e_{n-2}$ ;  $\dots$ ;  $e_{n-1} e_{n-2} \dots e_1$ . Totalizando  $\frac{n-1}{2}$  caminhos.

Portanto, existem  $n - 1$  caminhos do tipo  $oc$ .

2) Para os caminhos  $M$ -bons do tipo  $oo$  temos as seguintes possibilidades:

Caminhos começando em  $e_1$ :  $e_1$ ;  $e_1 e_2 e_3$ ;  $\dots$ ;  $e_1 e_2 e_3 \dots e_{n-2}$ . Perfazendo  $\frac{n-1}{2}$  caminhos;

Começando em  $e_3$ :  $e_3$ ;  $e_3 e_4 e_5$ ;  $\dots$ ;  $e_3 e_4 e_5 \dots e_{n-2}$ . Totalizando  $\frac{n-1}{2} - 1$  caminhos;

$\vdots$

Começando em  $e_{n-2}$ : temos um único caminho, que é o próprio  $e_{n-2}$ , ou seja,  $\frac{n-1}{2} - \frac{n-3}{2} = 1$  caminho.

Portanto, do Teorema 4.7,

$$d(M) = n - 1 + \sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{n-1}{2} - i \right) = n - 1 + \left( \frac{n-1}{2} \right)^2 - \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} i = \frac{n^2 + 8n - 9}{8}.$$

□

**Proposição 5.16.** *Seja  $n \geq 3$ . Se  $C_n$  é um ciclo ímpar, então  $\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_n))) = \frac{n^2 + 8n - 9}{8}$ .*

*Demonstração.* Da Proposição 5.12, existe um emparelhamento maximal  $M$  que possui grau máximo em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_n))$ . Do Lema 5.15, se  $M$  for um emparelhamento quase perfeito do ciclo, então  $d(M) = \frac{n^2 + 8n - 9}{8}$ . Como todo ciclo ímpar possui um emparelhamento quase perfeito, é suficiente provar que se  $M$  é um emparelhamento maximal de  $C_n$ , então  $d(M) \leq \frac{n^2 + 8n - 9}{8}$ .

Como todos emparelhamentos maximais de  $C_3, C_5$  e  $C_7$  são quase perfeitos, iremos assumir que  $n \geq 9$ . Ainda, supomos que o emparelhamento maximal  $M$  de  $C_n$  não seja quase perfeito. Seja  $\{E_1, \dots, E_k, E_{k+1}\}$  a partição  $M$ -boa de  $E(C_n)$ . Lembramos que, sendo  $M$  emparelhamento maximal,  $E_{k+1} = \emptyset$ .

Do Lema 5.14, para cada  $1 \leq i \leq k$ ,  $B_i = P_{n_i}$  é um caminho  $M_i$ -bom do tipo  $cc$  e  $n_i$  é par. Além disso, cada  $M_i$  é emparelhamento principal de  $P_{n_i}$ .

Do Teorema 5.7 e do Lema 5.9,

$$d(M) = \sum_{i=1}^k d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{n_i}))}(M_i) = \sum_{i=1}^k \Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{n_i}))) = \sum_{i=1}^k \frac{n_i^2 + 6n_i - 8}{8}.$$

Ainda, do Lema 5.14,  $\sum_{i=1}^k n_i = n - k$  e  $k \leq n/3$ . Portanto,

$$\begin{aligned} d(M) &= \sum_{i=1}^k \frac{n_i^2 + 6n_i - 8}{8} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^k n_i^2 + \frac{3}{4} \sum_{i=1}^k n_i - \frac{k}{8} < \frac{1}{8} \left( \sum_{i=1}^k n_i \right)^2 + \frac{3}{4} (n - k) - \frac{k}{8} = \\ &= \frac{(n - k)^2}{8} + \frac{3n}{4} - \frac{7k}{8} = \frac{n^2 + 6n + k(k - 2n - 7)}{8} \leq \frac{n^2 + 6n + \frac{n}{3}(\frac{n}{3} - 2n - 7)}{8} < \\ &< \frac{n^2 + 6n}{8} < \frac{n^2 + 8n - 9}{8}, \text{ pois } n \geq 9 \end{aligned}$$

□

Da proposição anterior e do Lema 5.15, segue que um emparelhamento quase perfeito de um ciclo ímpar possui grau máximo em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_n))$ . Em seguida, vamos calcular o grau de um emparelhamento perfeito de um ciclo par. Depois, mostraremos que este grau corresponde ao grau máximo do EPE desse ciclo.

**Lema 5.17.** *Seja  $n \geq 4$ . Se  $C_n$  é um ciclo par e  $M$  é um emparelhamento perfeito de  $C_n$ , então*

$$d(M) = \frac{n^2 + 4}{4}.$$

*Demonstração.* Seja  $C_n = e_1 e_2 \dots e_n$ ,  $n \geq 4$  par, e suponhamos que  $M = \{e_1, e_3, e_5, \dots, e_{n-1}\}$ . Vamos calcular o grau de  $M$  contando o número de ciclos e caminhos  $M$ -bons. Existe um único ciclo  $M$ -bom, que é o próprio  $C_n$ . Como  $M$  é perfeito, todos os caminhos  $M$ -bons são do tipo  $oo$ . Com uma única aresta, temos  $n/2$  caminhos, dados pelas arestas de  $M$ . Fixemos agora a aresta  $e_1$  e vejamos quantos caminhos  $M$ -bons com mais de uma aresta começam em  $e_1$ . Em um sentido, temos:  $e_1 e_2 e_3$ ,  $e_1 e_2 e_3 e_4 e_5$ ,  $\dots$ ,  $e_1 e_2 \dots e_{n-2}$ . No outro sentido:  $e_1 e_{n-1} e_{n-2}$ ,  $e_1 e_{n-1} e_{n-2} e_{n-3} e_{n-4}$ ,  $\dots$ ,  $e_1 \dots e_3$ . Portanto, temos  $(\frac{n}{2} - 1) + (\frac{n}{2} - 1) = n - 2$  caminhos  $M$ -bons com mais de uma aresta que começam em  $e_1$ . Multiplicando por  $\frac{n}{2}$ , obtemos o número de caminhos  $M$ -bons com mais de uma aresta que começam em cada aresta  $e_i$  de  $M$ . Por fim, dividimos este número por 2, pois cada caminho foi contado duas vezes: o caminho que começa na aresta  $e_j$  e termina na aresta  $e_k$  também foi contado como caminho que começa em  $e_k$  e termina em  $e_j$ . Logo, do Teorema 4.7,

$$d(M) = 1 + \frac{n}{2} + \frac{(n-2)(\frac{n}{2})}{2} = \frac{n^2 + 4}{4}.$$

□

**Proposição 5.18.** *Seja  $C_n$ ,  $n \geq 4$ , um ciclo par. Tem-se que  $\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_n))) = \frac{n^2+4}{4}$ .*

*Demonstração.* Da Proposição 5.12 e do Lema 5.17, basta mostrar que, se  $N$  é um emparelhamento maximal de  $C_n$  que não é perfeito, então  $d(N) \leq \frac{n^2+4}{4}$ . De fato, mostraremos que, se  $n \geq 6$ , então  $d(N) < \frac{n^2+4}{4}$ . Do exemplo anterior, a afirmação é verdadeira se  $n = 4$ .

Seja  $N$  um emparelhamento maximal de  $C_n$  que não é perfeito e seja  $\{E_1, \dots, E_{k+1}\}$  a partição  $N$ -boa de  $E(C_n)$ . Sendo  $N$  maximal,  $E_{k+1} = \emptyset$ . Se  $n = 6$ ,  $k = 2$  e a partição  $N$ -boa é  $\{E_1, E_2, E_3\}$ , com  $E_3 = \emptyset$  e  $B_1 = B_2 = P_4$ . Além disso,  $M_1$  e  $M_2$  são emparelhamentos principais de  $B_1$  e  $B_2$ , respectivamente. Do Teorema 5.7 e do Lema 5.9,  $d(N) = 2\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_4))) = 8 < \frac{n^2+4}{4} = 10$ . Logo,  $N$  não possui grau máximo em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_6))$ .

Suponhamos agora que  $n \geq 8$ . Do Lema 5.14,  $B_i = P_{n_i}$ ,  $1 \leq i \leq k$ , é um caminho  $M_i$ -bom do tipo  $cc$  com  $n_i$  par e  $\sum_{i=1}^k (n_i - 1) = n$ ,  $k \geq 2$ . Sendo  $M_i$  emparelhamento principal de  $P_{n_i}$ , do Teorema 5.7 e do Lema 5.9,

$$\begin{aligned} d(N) &= \sum_{i=1}^k \frac{n_i^2 + 6n_i - 8}{8} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^k (n_i - 1)^2 + \sum_{i=1}^k (n_i - 1) - \frac{k}{8} = n - \frac{k}{8} + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^k (n_i - 1)^2 \leq \\ &\leq n - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^k (n_i - 1)^2 < n - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left( \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \right)^2 = n - \frac{1}{4} + \frac{n^2}{8} = \\ &= \frac{8n - 2 + n^2}{8} < \frac{n^2 + 4}{4}, \text{ pois } n \geq 8. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 5.19.** *Consideremos o ciclo  $C_4$  com seus emparelhamentos descritos na Figura 5.10. Do Lema 5.17,  $d(M_5) = d(M_6) = 5$ , que é o grau máximo de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_4))$ . Note que há emparelhamentos que não são perfeitos mas possuem grau máximo no  $EPE(C_4)$ .*

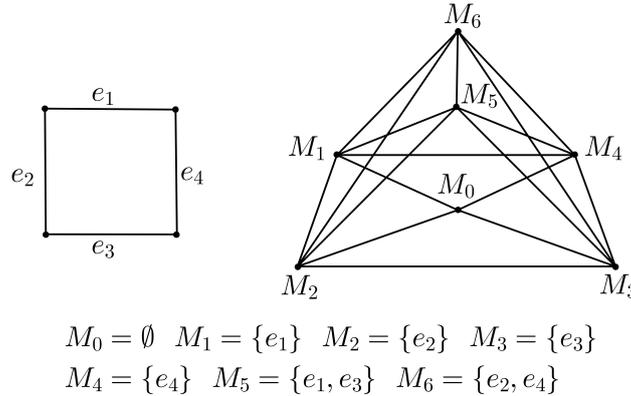


Figura 5.10:  $C_4$  e seu EPE

**Exemplo 5.20.** *Para o ciclo  $C_6 = e_1e_2e_3e_4e_5e_6$ , os emparelhamentos  $M = \{e_1, e_3, e_5\}$  e  $N = \{e_2, e_4, e_6\}$  possuem grau máximo  $\Delta = 10$  em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_6))$ .*

Do Lema 5.17 e da Proposição 5.18, segue que um emparelhamento perfeito de um ciclo par possui grau máximo no seu correspondente EPE. A seguir iremos estudar o grau máximo do EPE de um grafo completo  $K_n$ . Como no caso do ciclo, consideraremos os casos em que  $n$  é par ou ímpar separadamente.

**Teorema 5.21.** Para  $n \geq 4$  par, seja  $K_n$  o grafo completo. O grau máximo do  $EPE(K_n)$  é dado por

$$\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_n))) = \frac{n}{2} + \sum_{i=2}^{n/2} \left[ 2^{i-1} (i+1)(i-1)! \binom{n/2}{i} \right]. \quad (5.2)$$

*Demonstração.* Notemos inicialmente que, quando  $n$  é par, todo emparelhamento maximal de  $K_n$  é perfeito. Assim, da Proposição 5.12, para encontrar  $\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_n)))$  é suficiente encontrar o grau de um emparelhamento perfeito de  $K_n$ . Seja  $M = \{e_1, e_2, \dots, e_{n/2}\}$  um tal emparelhamento. Para calcular  $d(M)$ , do Teorema 4.7, basta contar o número de caminhos e ciclos  $M$ -bons. Como  $M$  é perfeito, todos os caminhos  $M$ -bons são do tipo  $oo$ , pois não há vértices  $M$ -insaturados.

(1) Caminhos:

a) Com uma aresta de  $M$ : são os caminhos formados exatamente por uma aresta de  $M$ , ou seja,  $n/2$  caminhos;

b) Com duas arestas de  $M$ : fixadas duas arestas de  $M$ , podemos formar  $2^2$  caminhos com tais arestas. Como temos  $\binom{n/2}{2}$  possibilidades para escolha de duas arestas de  $M$ , obtemos  $2^2 \binom{n/2}{2}$  caminhos;

c) Com três arestas de  $M$ : fixemos agora três arestas de  $M$ . Há  $\frac{3!}{2}$  maneiras de ordenar tais arestas. Por exemplo, se  $n = 6$ , fixadas as arestas  $e_1, e_2, e_3$ , temos as ordenações  $e_1, e_2, e_3$ ;  $e_1, e_3, e_2$  e  $e_2, e_1, e_3$  (veja a Figura 5.11). Para cada ordenação, temos  $2^3$  caminhos. Como podemos escolher três arestas de  $\binom{n/2}{3}$  modos, obtemos  $2^3 \frac{3!}{2} \binom{n/2}{3}$  caminhos;

d) Com  $i$  arestas de  $M$ , para  $2 \leq i \leq n/2$ : prosseguindo como anteriormente, fixadas  $i$  arestas de  $M$ ,  $2 \leq i \leq n/2$ , obtemos  $2^i \frac{i!}{2} \binom{n/2}{i}$  caminhos.

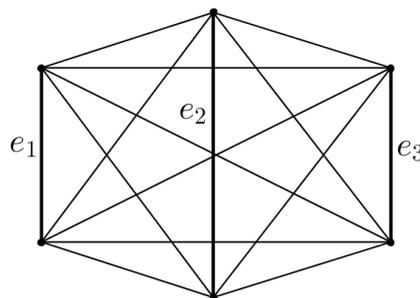


Figura 5.11:  $K_6$

(2) Ciclos:

a) Com duas arestas de  $M$ : para cada duas arestas de  $M$  temos dois ciclos. Assim, o número de ciclos  $M$ -bons com duas arestas de  $M$  é  $2 \binom{n/2}{2}$ ;

b) Com três arestas de  $M$ : fixemos três arestas de  $M$ . O número de maneiras de ordenar estas arestas é o número de permutações circulares com 3 elementos, dividido por dois (pois aqui não importa o sentido), ou seja,  $2!/2$ . Neste caso, só há uma maneira de ordenar tais arestas num ciclo. Fixada uma ordenação, existem  $2^3$  ciclos. Como podemos escolher três arestas de  $\binom{n/2}{3}$  modos, o número de ciclos com três arestas de  $M$  é  $2^3 \frac{2!}{2} \binom{n/2}{3}$ ;

c) Com quatro arestas de  $M$ : fixemos quatro arestas de  $M$ . De forma análoga à anterior, o número maneiras de ordenar as arestas é  $3!/2$ . Fixada uma ordenação, há  $2^4$  ciclos. Como podemos escolher quatro arestas de  $\binom{n/2}{4}$  modos, o número de ciclos com quatro arestas de  $M$  é  $2^4 \frac{3!}{2} \binom{n/2}{4}$ ;

d) Com  $i$  arestas de  $M$ ,  $2 \leq i \leq n/2$ : prosseguindo como anteriormente, com  $i$  arestas de  $M$ ,  $2 \leq i \leq n/2$ , obtemos  $2^i \frac{(i-1)!}{2} \binom{n/2}{i}$  ciclos.

Por fim, de (1) e (2) e utilizando o Teorema 4.7, obtemos

$$d(M) = \Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_n))) = \frac{n}{2} + \sum_{i=2}^{n/2} \left[ 2^{i-1} (i+1)(i-1)! \binom{n/2}{i} \right],$$

uma vez que  $i! + (i-1)! = (i+1)(i-1)!$ .

□

**Exemplo 5.22.** Para o grafo  $K_6$ , temos

$$\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_6))) = 3 + \sum_{i=2}^3 \left[ 2^{i-1} (i+1)(i-1)! \binom{n/2}{i} \right] = 3 + 18 + 32 = 53.$$

O próximo teorema nos dá o grau máximo de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_n))$  quando  $n$  é ímpar. Neste caso, consideramos o grafo  $K_n$  como o *join* de  $K_{n-1}$  com  $K_1$  e aplicamos o Teorema 5.21 para  $K_{n-1}$ , visto que  $n-1$  é par.

**Teorema 5.23.** Seja  $n \geq 5$  ímpar, e  $K_n$  o grafo completo. Tem-se que

$$\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_n))) = \frac{3n-3}{2} + \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} \left[ 2^{i-1} (i-1)! (3i+1) \binom{\frac{n-1}{2}}{i} \right]. \quad (5.3)$$

*Demonstração.* Observamos inicialmente que se  $n \geq 3$  é ímpar, todos os emparelhamentos maximais de  $K_n$  possuem  $\frac{n-1}{2}$  arestas e, dada a estrutura deste grafo, todos estes possuem o mesmo grau no esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_n))$ . Assim, da Proposição 5.12, para calcular  $\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_n)))$  é suficiente encontrar o grau de um emparelhamento maximal de  $K_n$ .

Um emparelhamento maximal  $M$  de  $K_n$ , sendo  $n$  ímpar, é quase perfeito. Logo, existe um único vértice  $u$  que não é saturado por  $M$ . Notemos que, ao retiramos de  $K_n$  este vértice e as arestas que nele incidem, obtemos uma cópia de  $K_{n-1}$ . Ainda,  $M$  é um emparelhamento perfeito de  $K_{n-1}$ . Logo, todo caminho  $M$ -bom de  $K_{n-1}$  é do tipo  $oo$  e não existe ciclo  $M$ -bom contendo o vértice  $u$ .

Assim, ao considerarmos o vértice  $u$  obtemos, além dos caminhos  $M$ -bons contidos em  $K_{n-1}$ , apenas caminhos  $M$ -bons do tipo  $oc$  em  $K_n$ , sendo estes forma  $uv_1\dots v_k$  ou da forma  $v_1\dots v_k u$ , para cada caminho  $M$ -bom de  $K_{n-1}$  (veja a Figura 5.12).

Deste modo, o número de ciclos  $M$ -bons de  $K_n$  é igual ao número de ciclos  $M$ -bons de  $K_{n-1}$ , enquanto que o número de caminhos  $M$ -bons de  $K_n$  é a soma do número de caminhos  $M$ -bons de  $K_{n-1}$  mais o dobro deste. Do Teorema 4.7 e do Teorema 5.21, obtemos que o grau máximo de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_n))$  é dado por

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_n))) &= \Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_{n-1}))) + 2 \left( \frac{n-1}{2} + \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} \left[ 2^i \frac{i!}{2} \binom{\frac{n-1}{2}}{i} \right] \right) = \\ &= \left( \frac{n-1}{2} + \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} \left[ 2^{i-1} (i+1)(i-1)! \binom{\frac{n-1}{2}}{i} \right] \right) + \left( (n-1) + \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} \left[ 2^i i! \binom{\frac{n-1}{2}}{i} \right] \right) = \\ &= \frac{3n-3}{2} + \sum_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} \left[ 2^{i-1} (i-1)! (3i+1) \binom{\frac{n-1}{2}}{i} \right]. \end{aligned}$$

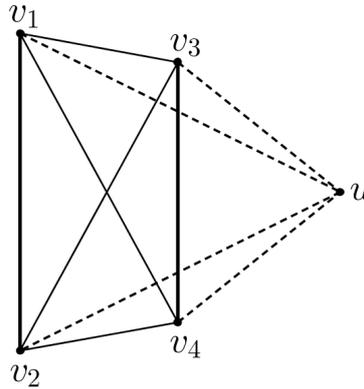


Figura 5.12:  $K_5 = K_4 \vee u$

□

**Exemplo 5.24.** Para o grafo  $K_7$ , temos

$$\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_7))) = 9 + \sum_{i=2}^3 \left[ 2^{i-1} (i-1)! (3i+1) \binom{\frac{7-1}{2}}{i} \right] = 9 + 42 + 80 = 131.$$

## 5.4 Limites para o grau máximo

Encontrar uma fórmula para o cálculo do grau máximo do EPE de um grafo  $G$  qualquer não é simples. Por isso, estipular limites para o grau máximo parece ser importante. Finalizando este capítulo, apresentamos dois limites inferiores para  $\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)))$ : o primeiro, denotado por  $\Delta_1$ , é válido para quaisquer grafos; o segundo, denotado por  $\Delta_2$ , é válido apenas para grafos que possuam árvore geradora com emparelhamento perfeito.

Sejam  $u$  e  $v$  vértices de  $G$ . Dentre todos os caminhos em  $G$  que tenham  $u$  e  $v$  como vértices pendentos, escolha um que tenha comprimento máximo. Denote este comprimento por  $c_{u,v}$ . Seja  $r-1$  o maior destes comprimentos, dentre todos os vértices do grafo, ou seja,

$$r-1 = \max\{c_{u,v} / u, v \in V(G)\}. \quad (5.4)$$

Neste caso, é lógico que  $G$  possui o caminho  $P_r$  como subgrafo (não necessariamente induzido).

**Proposição 5.25.** *Sejam  $G$  um grafo com  $m$  arestas e  $r-1$  como definido em (5.4). Se  $r$  é par,  $\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))) \geq \frac{r^2-2r+8m}{8}$ ; se  $r$  é ímpar,  $\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))) \geq \frac{r^2-4r+8m+3}{8}$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $G$  seja um grafo com  $m$  arestas e seja  $r-1$  como definido em (5.4). Neste caso,  $G$  possui um caminho  $P_r$  como subgrafo. Se  $r$  é ímpar, de (5.1), existe um emparelhamento  $M$  de  $P_r$  tal que  $d(M) = \frac{r^2+4r-5}{8}$ . Por outro lado, para cada aresta  $e \in E(G)$  que não pertence a  $P_r$ , considerando o conjunto  $L_e$  das arestas de  $M$  que incidem em  $e$ , temos que  $M$  é adjacente a  $(M \setminus L_e) \cup \{e\}$  no  $\text{EPE}(G)$ . Como existem  $m - (r-1) = m - r + 1$  arestas de  $G$  que não pertencem a  $P_r$ , obtemos que

$$d(M) \geq \frac{r^2+4r-5}{8} + (m-r+1) = \frac{r^2-4r+8m+3}{8}.$$

Analogamente, se  $r$  é par, de (5.1), existe um emparelhamento  $M$  de  $P_r$  que possui grau máximo no  $\text{EPE}(P_r)$ , a saber,  $d(M) = \frac{r^2+6r-8}{8}$ . Somando a este os  $m - r + 1$  vértices de  $G$  adjacentes a  $M$ , dados por  $(M \setminus L_e) \cup \{e\}$ , obtemos que

$$d(M) \geq \frac{r^2-2r+8m}{8}.$$

□

Vamos utilizar a seguinte notação: dado um grafo com  $m$  arestas e  $r-1$  como definido em (5.4),

$$\Delta_1(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))) = \begin{cases} \frac{r^2-4r+8m+3}{8}, & \text{se } r \text{ é ímpar,} \\ \frac{r^2-2r+8m}{8}, & \text{se } r \text{ é par.} \end{cases} \quad (5.5)$$

Nos exemplos que seguem, mostramos que o limite inferior para o grau máximo do EPE de um grafo qualquer  $\Delta_1$  não pode ser melhorado, uma vez que existem EPEs cujos

graus máximos satisfazem  $\Delta_1$ .

**Exemplo 5.26.** Para o caminho  $P_n$  tem-se  $r = n$ . Se  $n$  é ímpar,

$$\Delta_1(\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_n))) = \frac{n^2 - 4n + 8(n-1) + 3}{8} = \frac{n^2 + 4n - 5}{8} = \Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_n)));$$

e se  $n$  é par,

$$\Delta_1(\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_n))) = \frac{n^2 - 2n + 8(n-1)}{8} = \frac{n^2 + 6n - 8}{8} = \Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_n))).$$

Como vimos no exemplo anterior, os EPEs dos caminhos são extremais para  $\Delta_1$ . Veremos no próximo exemplo que os EPEs das estrelas também são extremais para este limite.

**Exemplo 5.27.** Seja  $S_{1,n}$  a estrela com  $n+1$  vértices. Neste caso,  $r-1 = 2$ , ou seja,  $r = 3$ . Da Proposição 2.45,  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_{1,n})) = K_{n+1}$ , donde segue que  $\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_{1,n}))) = n$ . Dado que  $r$  é ímpar, de (5.5) chega-se a

$$\Delta_1(\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_{1,n}))) = \frac{9 - 12 + 8n + 3}{8} = n = \Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_{1,n}))).$$

Os EPEs dos ciclos, não necessariamente são extremais para  $\Delta_1$ . Por exemplo, o EPE( $C_4$ ) é extremal mas o EPE( $C_5$ ) não é.

**Exemplo 5.28.** Para o ciclo  $C_4$ ,  $r-1 = 3$ , donde  $r = 4$ . Da Proposição 5.18,  $\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_4))) = \frac{16+4}{4} = 5$ . Calculando  $\Delta_1(\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_4)))$ , obtemos

$$\Delta_1(\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_4))) = \frac{4^2 - 8 + 32}{8} = 5 = \Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_4))).$$

No caso do ciclo  $C_5$ ,  $r-1 = 4$ , ou seja,  $r = 5$ . Além disso, da Proposição 5.16,  $\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_5))) = \frac{25+40-9}{8} = 7$ . Calculando  $\Delta_1(\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_5)))$ ,

$$\Delta_1(\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_5))) = \frac{5^2 - 20 + 40 + 3}{8} = 6.$$

No que segue, calcularemos um novo limite inferior para o grau máximo do EPE de um grafo  $G$ , onde  $G$  é um grafo que possui uma árvore geradora  $T$  e esta, por sua vez, admite um emparelhamento perfeito. Antes, porém, veremos uma forma de calcular o grau de um emparelhamento perfeito em ciclos pares ou em grafos que não possuem ciclo par.

**Lema 5.29.** Seja  $G$  um grafo com  $n \geq 4$  vértices tal que  $G$  ou é um ciclo par ou não possui nenhum ciclo par. Se  $M$  é um emparelhamento perfeito de  $G$  e  $N$  outro emparelhamento tal que  $|N| = \frac{n}{2} - 1$ , então  $M \sim N$ .

*Demonstração.* Seja  $N$  um emparelhamento de  $G$  tal que  $|N| = \frac{n}{2} - 1$ , ou seja,  $|N| = |M| - 1$ , uma vez que  $M$  é emparelhamento perfeito de  $G$ . Do Teorema 2.24,  $M\Delta N$  é união disjunta (com relação aos vértices) de caminhos e ciclos, sendo que tais ciclos são pares. Notemos que, se  $G$  é um ciclo par  $C_n$ , então  $M\Delta N$  é um ciclo se, e somente se,  $M$  e  $N$  são emparelhamentos perfeitos. Portanto, desde que  $N$  não seja emparelhamento perfeito de  $G$ , se  $G$  não possui ciclo par, ou  $G$  é um ciclo par,  $M\Delta N$  será união disjunta de caminhos.

Suponhamos então que  $M\Delta N = P_{n_1} \cup P_{n_2} \cup \dots \cup P_{n_k}$ . Como  $M$  é um emparelhamento perfeito de  $G$ , temos que  $M \cap E(P_{n_i})$  é um emparelhamento perfeito de  $P_{n_i}$ , para  $1 \leq i \leq k$ . Portanto,  $P_{n_i}$  possui  $\frac{n_i}{2}$  arestas de  $M$  e  $\frac{n_i}{2} - 1$  arestas de  $N$ , para  $1 \leq i \leq k$ . Dado que  $|N| = |M| - 1$ , segue que  $M\Delta N = P_{n_1}$ . Do Teorema 2.27,  $M \sim N$ .  $\square$

Já sabemos que, se  $C_n$  é um ciclo par e  $M$  é um emparelhamento perfeito de  $C_n$ , então  $d(M) = \frac{n^2+4}{4}$  (veja o Lema 5.17). Da Proposição 4.1 e do Lema 5.29, se  $G$  possui  $t$  emparelhamentos com cardinalidade  $\frac{n}{2} - 1$ , então  $d(M) = t + 1$ , isto é,  $d(M) = t + 1 = \frac{n^2+4}{4}$ .

**Proposição 5.30.** *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices que não possui ciclo par e seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $G$ . Se  $G$  possui  $t$  emparelhamentos com cardinalidade  $\frac{n}{2} - 1$ , então  $d(M) = t$ .*

*Demonstração.* Seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $G$ . Da Proposição 4.1, se  $M \sim N$ , então  $|N| = \frac{n}{2} - 1$  ou  $N$  é um emparelhamento perfeito.

Seja  $N$  um emparelhamento tal que  $|N| = \frac{n}{2} - 1$ . Do teorema anterior,  $M \sim N$ . Por outro lado, se  $M' \neq M$  é um emparelhamento perfeito de  $G$ , então  $M'$  não pode ser adjacente a  $M$ , pois  $G$  não possui ciclo par.  $\square$

**Exemplo 5.31.** *Seja  $M = \{e_2, e_4, e_6\}$  o emparelhamento perfeito do grafo  $G$  da Figura 5.13. Da Proposição 5.30,  $M$  é adjacente somente aos emparelhamentos que possuem duas arestas, que são:  $M_1 = \{e_1, e_5\}, M_2 = \{e_1, e_6\}, M_3 = \{e_2, e_4\}, M_4 = \{e_2, e_5\}, M_5 = \{e_2, e_6\}, M_6 = \{e_3, e_5\}, M_7 = \{e_3, e_6\}$  e  $M_8 = \{e_4, e_6\}$ . Logo,  $d(M) = 8$ .*

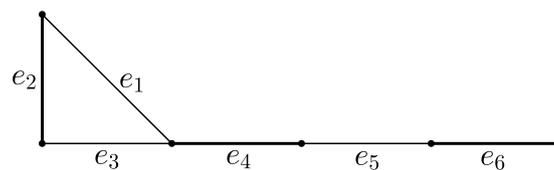


Figura 5.13:  $M = \{e_2, e_4, e_6\}$  é adjacente aos emparelhamentos com cardinalidade dois

Seja  $F$  uma floresta com  $n$  vértices e seja  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$  o polinômio característico da matriz de adjacência de  $F$ . Neste caso, o número de

emparelhamentos de  $F$  com cardinalidade  $\frac{n}{2} - 1$  é igual a  $|a_2|$  (veja [20]). Assim, segue da Proposição 5.30 que, se  $F$  possui emparelhamento perfeito  $M$ , então  $d(M) = |a_2|$ . Conseqüentemente, se  $G$  é um grafo que tenha uma árvore geradora com emparelhamento perfeito, a proposição seguinte dá um limite inferior para  $\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)))$ .

**Proposição 5.32.** *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas. Seja  $T$  uma árvore geradora de  $G$  e  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$  o polinômio característico de  $T$ . Se  $T$  possui emparelhamento perfeito, então*

$$\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))) \geq |a_2| + m - n + 1.$$

*Demonstração.* Seja  $T$  uma árvore geradora de  $G$  com emparelhamento perfeito  $M$ , e seja  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$  o polinômio característico de  $T$ . Da Proposição 5.30 e do que observamos antes,  $d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))}(M) = |a_2|$ . Por outro lado, para cada aresta  $e \in G$  que não pertence a  $T$ ,  $M$  é adjacente a  $(M \setminus L_e) \cup \{e\}$ , onde  $L_e$  é o conjunto das arestas de  $M$  adjacentes a  $e$ . Como existem  $m - (n - 1)$  arestas em  $G \setminus T$ , obtemos que

$$d(M) \geq |a_2| + m - n + 1.$$

□

Para  $G$  nas condições do corolário anterior, vamos utilizar a seguinte notação:

$$\Delta_2^T(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))) = |a_2| + m - n + 1. \quad (5.6)$$

Nossos estudos com limites inferiores para o grau máximo do EPE de um grafo indicam que, em geral, esses limites ainda estão distantes do grau máximo. Para as árvores, no entanto, os resultados são mais satisfatórios, como pode-se ver nos exemplos que seguem.

**Exemplo 5.33.** *Seja  $G$  o grafo dado na Figura 5.14. Neste caso, temos  $n = 8, m = 10$  e  $r = 8$ . Portanto,*

$$\Delta_1(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))) = \frac{64 - 16 + 80}{8} = 16.$$

*Por outro lado, considerando a árvore geradora  $T$  dada pelas arestas  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ , temos  $p(x) = x^8 - 7x^6 + 14x^4 - 9x^2 + 1$ , ou seja, o emparelhamento perfeito  $M$  de  $T$  satisfaz  $d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))}(M) = |a_2| = 9$ . Logo,*

$$\Delta_2^T(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))) = 9 + 10 - 8 + 1 = 12.$$

*Pode-se verificar que  $d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))}(M) = 24$  e  $\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))) = 25$ .*

Observamos que o limite  $\Delta_2^T$  depende da árvore geradora  $T$ . No exemplo anterior, se consideramos a árvore geradora  $T'$  dada pelas arestas  $e, f, e_1, e_3, e_5, e_6, e_7$ , temos  $p(x) =$

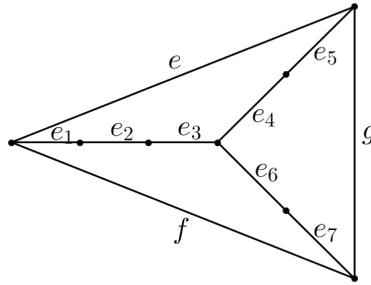


Figura 5.14:  $\Delta_2 < \Delta_1 < \Delta$

$x^8 - 7x^6 + 14x^4 - 8x^2 + 1$ , ou seja,  $|a_2| = 8$ . Neste caso,  $\Delta_2^{T'}(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))) = 8 + 10 - 8 + 1 = 11$ .

**Exemplo 5.34.** Para a árvore  $T$  dada pelas arestas  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$  do grafo da Figura 5.14, temos  $\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))) = 11$ . Neste caso,  $n = 8, m = 7$  e  $r = 6$ . Portanto,

$$\Delta_1(\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))) = \frac{36 - 12 + 56}{8} = 10, \quad \Delta_2^T(\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))) = 9.$$

Nos exemplos anteriores,  $\Delta_2 < \Delta_1 < \Delta$ . O exemplo a seguir mostra que nem sempre isso ocorre, ou seja,  $\Delta_2$  pode ser um limite melhor do que  $\Delta_1$ .

**Exemplo 5.35.** Seja  $T$  a árvore dada na Figura 5.15. Neste caso,  $\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))) = 17$ ,  $\Delta_1(\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))) = 14$  e  $\Delta_2^T(\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))) = 15$ .

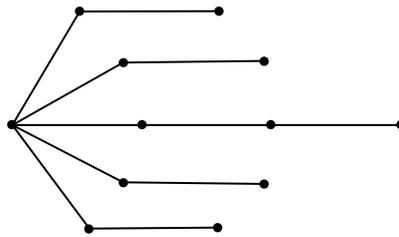


Figura 5.15:  $\Delta_1 < \Delta_2 < \Delta$

# Capítulo 6

## Grafos versus esqueletos

Neste capítulo estamos interessados em duas questões. A primeira delas é saber se um grafo pode ser ou não o esqueleto de algum politopo de emparelhamentos, isto é, dado um grafo  $H$ , será que existe um grafo  $G$  tal que  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = H$ ? A segunda questão a ser investigada é a seguinte: dado  $H$  como EPE de um grafo  $G$ , existe  $G'$  não isomorfo a  $G$  tal que  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G')) = H$ ? Na Seção 6.1, respondemos parcialmente à primeira pergunta e, na Seção 6.2, mostramos que  $K_3$  e  $S_{1,3}$  são os únicos grafos conexos não isomorfos tais que  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_3)) = \mathcal{G}(\mathcal{M}(S_{1,3}))$ .

Desde que ao acrescentarmos ou retirarmos vértices isolados de um grafo não alteramos o seu EPE, daqui para frente vamos admitir que  $G$  não possui vértices isolados, a exceção do  $K_1$ .

### 6.1 Grafos que realizam esqueletos de politopos de emparelhamentos

Dizemos que um grafo  $H$  realiza um EPE se, e somente se, existe um grafo  $G$  tal que  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = H$ .

Nesta seção, vamos investigar que tipos de grafos realizam EPEs. Estudaremos este problema em classes especiais de grafos, tais como: grafos hamiltonianos, 2-regulares, planares, bipartidos e grafos linha.

O esqueleto do politopo de emparelhamentos de um grafo é sempre um grafo conexo (veja [26]). Portanto, se  $H$  é desconexo, não existe um grafo  $G$  tal que  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = H$ .

Naddef e Pulleyblank [40] mostraram que, se  $G \neq K_1$  e  $G \neq K_2$ , então  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  é hamiltoniano. Este fato exclui enumeráveis grafos como possíveis realizações de EPEs. Daí, uma importante questão seria verificar se a recíproca deste fato é verdadeira, ou seja, será que existem grafos hamiltonianos que não realizam esqueletos de politopos de emparelhamentos? A proposição a seguir mostra que, se  $n \geq 5$ , então o ciclo  $C_n$  não é EPE de nenhum grafo.

**Proposição 6.1.** *Para todo  $n \geq 5$ , não existe grafo  $G$  tal que  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = C_n$ .*

*Demonstração.* Vamos mostrar que os únicos ciclos que realizam EPEs são  $C_3$  e  $C_4$ . Seja  $C$  um ciclo e suponhamos que  $C = \mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ , para algum grafo  $G$  sem vértices isolados. Como  $C$  é 2-regular, do Teorema 4.19,  $G$  é um grafo que possui exatamente duas arestas e é uma união disjunta de estrelas ou triângulos. Portanto,  $G = S_{1,2}$  ou  $G = 2K_2$ . No primeiro caso,  $C = C_3$  e, no segundo,  $C = C_4$ .  $\square$

Pode-se perguntar também se existe  $G$  para o qual  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  é um grafo euleriano. Como vimos no Teorema 2.1, um grafo conexo é euleriano se, e somente se, os graus de todos os seus vértices são pares. Do Corolário 4.13, se  $G$  possui  $m$  arestas, então  $\delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))) = m$ . Portanto, se  $G$  é conexo e possui um número ímpar de arestas, a resposta é não. No entanto, se  $G$  possui um número par de arestas,  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  pode ser euleriano ou não. Por exemplo, se  $n > 1$  é ímpar, a estrela  $S_{1,n-1}$  possui um número par de arestas. Além disso,  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_{1,n-1})) = K_n$  é regular de grau  $n - 1$  e, portanto, é euleriano. Já o caminho  $P_5$  tem um número par de arestas, mas  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_5))$  não é euleriano pois o seu grau máximo é  $\Delta = 5$ .

Será que a planaridade é uma condição suficiente para que um grafo realize o EPE de algum outro grafo? A resposta é não. Para  $n \geq 5$ , o ciclo  $C_n$  não realiza o EPE de nenhum grafo. Os grafos com no máximo 3 arestas são:  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $2K_2$ ,  $3K_2$ ,  $S_{1,2}$ ,  $S_{1,3}$ ,  $K_2 \cup S_{1,2}$  e  $P_4$ . Seus respectivos EPEs são grafos planares:  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_1)) = K_1$ ,  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_2)) = K_2$ ,  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(2K_2)) = C_4$ ,  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_{1,2})) = K_3$ ,  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(3K_2)) = Q_3$ ,  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_{1,3})) = \mathcal{G}(\mathcal{M}(K_3)) = K_4$ ,  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_2 \cup S_{1,2})) = H_1$  e  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_4)) = H_2$ , onde  $H_1$  e  $H_2$  são os grafos dados na figura abaixo.

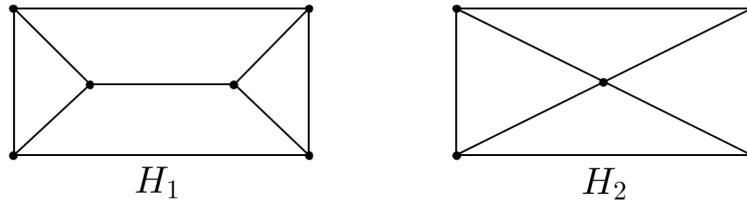


Figura 6.1: Grafos  $H_1$  e  $H_2$

Vamos mostrar que estes são os únicos grafos planares que realizam EPEs. Para isso utilizaremos dois resultados clássicos: o Teorema 2.12, que garante que todo grafo  $d$ -politopal contém uma subdivisão de  $K_{d+1}$  (um grafo é  $d$ -politopal se é o esqueleto de um politopo de dimensão  $d$ ), e o Teorema de Kuratowski (Teorema 2.2), que afirma que um grafo é planar se, e somente se, não possui subgrafo homeomorfo a  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ .

**Teorema 6.2.** *Um grafo planar  $H$  realiza o EPE de algum outro grafo se, e somente se,  $H$  é isomorfo a um dos grafos  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $Q_3$ ,  $C_4$ ,  $K_4$ ,  $H_1$  ou  $H_2$ , onde  $H_1$  e  $H_2$  são os grafos dados na Figura 6.1.*

*Demonstração.* Se  $H$  é isomorfo a um dos grafos  $K_1, K_2, K_3, Q_3, C_4, K_4, H_1$  ou  $H_2$ , onde  $H_1$  e  $H_2$  são os grafos dados na Figura 6.1, então  $H$  é EPE dos respectivos grafos  $K_1, K_2, S_{1,2}, 3K_2, 2K_2, S_{1,3}$  ou  $K_3, K_2 \cup S_{1,2}$  e  $P_4$ . Reciprocamente, suponhamos  $H$  um grafo planar tal que  $H = \mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ , para algum grafo  $G$  com  $m \geq 1$  arestas e sem vértices isolados, ou para  $G = K_1$ . Como  $\dim(\mathcal{M}(G)) = m$ , temos que  $H$  é um grafo  $m$ -politopal e do Teorema 2.12,  $H$  contém um subgrafo homeomorfo a  $K_{m+1}$ . Sendo  $H$  planar, do Teorema 2.2,  $m \leq 3$  e, portanto,  $G$  é  $K_1, K_2, S_{1,2}, 3K_2, 2K_2, S_{1,3}, K_3, K_2 \cup S_{1,2}$  ou  $P_4$ . Logo,  $H$  é isomorfo a  $K_1, K_2, K_3, Q_3, C_4, K_4, H_1$  ou  $H_2$ , onde  $H_1$  e  $H_2$  são dados na Figura 6.1.  $\square$

Tomando-se os cinco poliedros convexos regulares como grafos (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro), já sabemos que o tetraedro e o cubo realizam EPEs para os grafos  $K_3$  e  $3K_2$ , respectivamente. Será que os demais poliedros regulares também satisfazem tal propriedade? Do Teorema 4.19,  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  é  $m$ -regular se, e somente se,  $G$  possui  $m$  arestas e é união de estrelas ou triângulos.

(1) O esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  é 3-regular se, e somente se,  $G$  é um dos seguintes grafos:  $S_{1,3}, K_3, 3K_2$  ou  $K_2 \cup S_{1,2}$ . Já vimos que nos dois primeiros casos,  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = K_4$ ; no terceiro,  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = Q_3$  e, no último,  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  é o grafo  $H_1$  dado na Figura 6.1. Portanto, o dodecaedro não realiza um EPE.

(2) Da mesma forma,  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  é 4-regular se, e somente se,  $G$  é um dos seguintes grafos:  $4K_2, 2K_2 \cup S_{1,2}, 2S_{1,2}, S_{1,3} \cup K_2, S_{1,4}$  ou  $K_3 \cup K_2$ . Se  $G = S_{1,4}$ , então  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = K_5$  possui 5 vértices. Nos demais casos, o esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  possui mais de 6 vértices. Como o octaedro possui 6 vértices, este não realiza EPE.

(3) Por fim, temos nove grafos cujos esqueletos são 5-regulares. São eles:  $5K_2, 3K_2 \cup S_{1,2}, K_2 \cup 2S_{1,2}, 2K_2 \cup S_{1,3}, K_2 \cup S_{1,4}, S_{1,2} \cup S_{1,3}, S_{1,5}, K_3 \cup S_{1,2}$  e  $K_3 \cup 2K_2$ . Destes, apenas os EPEs dos grafos  $S_{1,2} \cup S_{1,3}$  e  $K_3 \cup S_{1,2}$  têm 12 vértices. Utilizando o software newGRAPH [41], verificamos que ambos os esqueletos  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_{1,2} \cup S_{1,3}))$  e  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_3 \cup S_{1,2}))$  possuem 16 triângulos. Como o icosaedro possui 20 triângulos, concluímos que este não realiza EPE.

Naddef e Pulleyblank [40] mostraram que, se o grafo de um  $(0, 1)$ -politopo é bipartido, então ele é um  $n$ -cubo. Em particular, se  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  é bipartido, então ele é um  $m$ -cubo, onde  $m$  é o número de arestas de  $G$ . A seguir, encontramos todos os grafos cujos EPEs são bipartidos.

**Lema 6.3.** *Se  $G$  é um grafo que possui  $P_3$  como subgrafo (não necessariamente induzido), então  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  não é bipartido.*

*Demonstração.* De fato, supondo  $P_3 = e_1 e_2$  um subgrafo de  $G$ , considere os emparelhamentos  $M_0 = \emptyset, M_1 = \{e_1\}$  e  $M_2 = \{e_2\}$ . Temos que  $M_0 \sim M_1 \sim M_2 \sim M_0$ , ou seja,

$\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  possui pelo menos um ciclo ímpar e, portanto, não é bipartido.  $\square$

**Proposição 6.4.** *Seja  $G$  um grafo com  $m$  arestas e sem vértices isolados. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $G = mK_2$ ;
- (ii)  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = Q_m$ ;
- (iii)  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  é um grafo bipartido.

*Demonstração.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Suponhamos que  $G = mK_2$ . Como  $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$  é formado por arestas duas a duas disjuntas, os vértices de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  são exatamente os subconjuntos de  $E(G)$ . Portanto,  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  possui  $2^m$  vértices e cada qual é uma  $m$ -upla de zeros e uns. Assim sendo, os vértices deste esqueleto coincidem com os vértices do cubo  $Q_m$ . Do Teorema 2.27, dois emparelhamentos  $M$  e  $N$  são adjacentes se, e somente se,  $M\Delta N$  é um caminho ou ciclo de  $G$ . Como  $G$  é formado por arestas disjuntas, temos que  $M \sim N$  se, e somente se,  $M\Delta N$  é uma aresta. E isto ocorre se, e somente se,  $M$  e  $N$  diferem por uma aresta, ou seja, seus respectivos vetores de indicência diferem por uma coordenada. Logo,  $M$  e  $N$  são adjacentes em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  se, e somente se, são adjacentes em  $Q_m$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) A implicação é imediata, visto que o  $m$ -cubo  $Q_m$  é um grafo bipartido.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Segue do Lema 6.3.  $\square$

Dado um grafo  $G$ , queremos saber agora se  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  é o grafo linha de algum grafo, ou seja, se existe um grafo  $H$  tal que  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = \mathcal{L}(H)$ . Para isso, faremos uso do Teorema 2.3, que caracteriza os grafos que são grafos linha através de nove subgrafos proibidos, dentre os quais está o grafo  $S_{1,3}$ .

**Proposição 6.5.** *Seja  $G$  um grafo. Se  $G$  possui  $P_6$  como subgrafo (não necessariamente induzido), então não existe um grafo  $H$  tal que  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = \mathcal{L}(H)$ .*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo que possui  $P_6 = e_1e_2e_3e_4e_5$  como subgrafo. Consideremos os emparelhamentos  $M_0 = \emptyset, M_1 = \{e_1\}, M_2 = \{e_3\}$  e  $M_4 = \{e_5\}$ . O subgrafo de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  induzido por tais vértices é isomorfo a  $S_{1,3}$ . Portanto, do Teorema 2.3, não existe um grafo  $H$  tal que  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = \mathcal{L}(H)$ .  $\square$

Se  $G$  não possui  $P_6$  como subgrafo nada podemos afirmar se  $\text{EPE}(G)$  é grafo linha.

**Exemplo 6.6.** *1) Se  $T$  é a árvore da Figura 6.2, então  $T$  não possui  $P_6$  como subgrafo. Consideremos os emparelhamentos  $\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}$  e  $\{e_1, e_4\}$ . O subgrafo de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))$  induzido por tais emparelhamentos é isomorfo a  $S_{1,3}$ . Logo, do Teorema 2.3,  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))$  não é grafo de linha de nenhum grafo.*

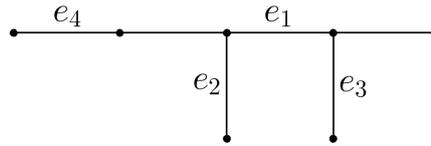


Figura 6.2:  $T$  não possui  $P_6$  como subgrafo

2) Para os grafos  $P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$ , temos:  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_2)) = P_2 = \mathcal{L}(P_3)$ ;  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_3)) = K_3 = \mathcal{L}(K_3)$ ;  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_4)) = \mathcal{L}(H_1)$ , onde  $H_1$  é dado na Figura 6.3); e  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_5)) = \mathcal{L}(H_2)$ , onde  $H_2$  é dado na Figura 6.4).

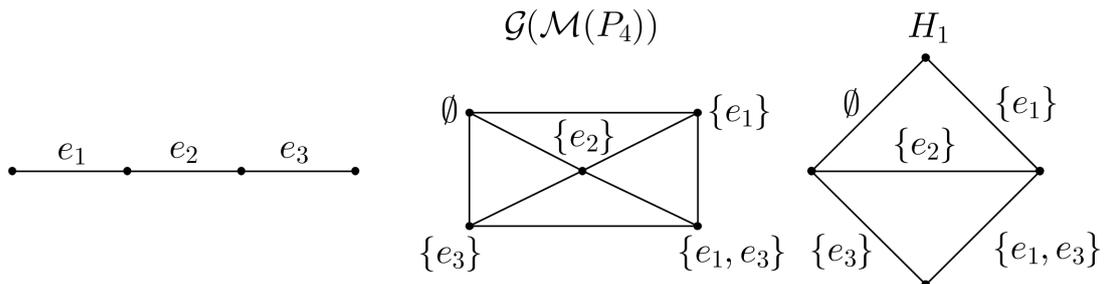


Figura 6.3:  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_4)) = \mathcal{L}(H_1)$

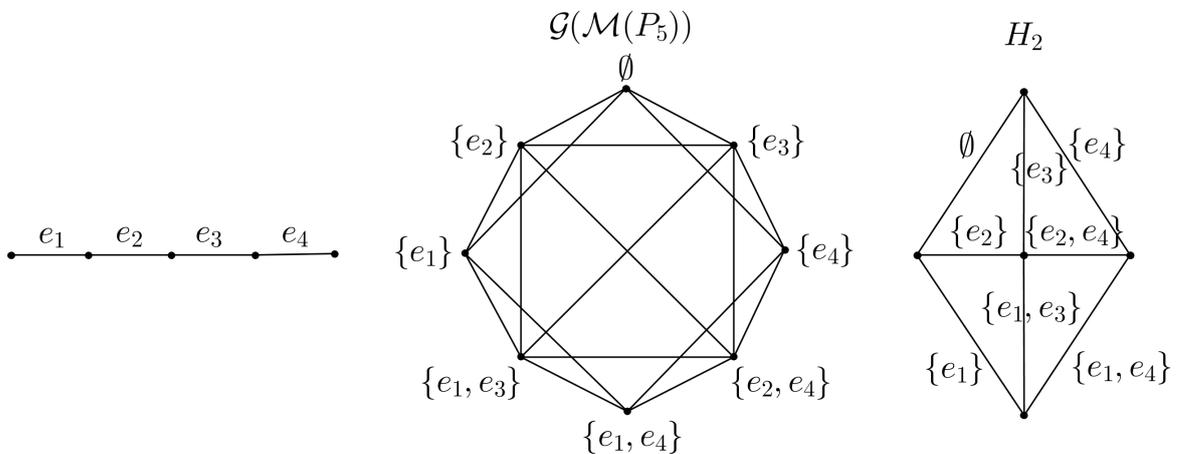


Figura 6.4:  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_5)) = \mathcal{L}(H_2)$

## 6.2 Sobre isomorfismo de EPEs

Começamos esta seção mostrando que, se  $G = \mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ , então  $G = K_1$  ou  $G = K_2$ . Depois, verificamos que  $K_3$  e  $S_{1,3}$  são os únicos grafos conexos não isomorfos cujos respectivos EPEs são também isomorfos. Finalmente, mostraremos que há infinitos pares de grafos desconexos com EPEs isomorfos.

**Proposição 6.7.** *Seja  $G$  um grafo. Tem-se que  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = G$  se, e somente se,  $G = K_1$  ou  $G = K_2$ .*

*Demonstração.* Se  $G = K_1$  ou  $G = K_2$ , então  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = G$ . Para ver a implicação contrária, seja  $G$  um grafo tal que  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = G$ . Suponhamos que  $\delta(G) = t$ ,  $t \geq 0$ . Se  $G$  possui  $m$  arestas, do Corolário 4.13,  $\delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))) = m$ . Se  $m > t$ , então  $\delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))) \neq \delta(G)$ , o que é uma contradição, pois  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = G$ . Logo,  $m = t$  e, portanto,  $m = 0$  ou  $m = 1$ . Como  $G$  é conexo, segue que  $G = K_1$  ou  $G = K_2$ .  $\square$

Costa e Mohammadian [36] mostraram que, se  $T_1$  e  $T_2$  são árvores e  $\mathcal{G}(\Omega_n(T_1)) = \mathcal{G}(\Omega_n(T_2))$ , então  $T_1 = T_2$ . Já é conhecido que  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(S_{1,3})) = \mathcal{G}(\mathcal{M}(K_3)) = K_4$ , apesar de  $S_{1,3}$  e  $K_3$  não serem isomorfos. Para ver que estes são os únicos grafos conexos que realizam EPEs isomorfos, vamos definir  $\mathcal{H}_G$  como o subgrafo induzido de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  pelos emparelhamentos unitários de  $G$ , isto é,  $V(\mathcal{H}_G) = \{\{e\} : e \in E(G)\}$ . Vamos chamar  $\mathcal{H}_G$  de *esqueleto dos emparelhamentos unitários* de  $G$ .

**Teorema 6.8.** *Para todo grafo  $G$ , seu grafo linha  $\mathcal{L}(G)$  é isomorfo a  $\mathcal{H}_G$ , o esqueleto dos emparelhamentos unitários de  $G$ .*

*Demonstração.* Sejam  $e_1, \dots, e_m$  as arestas de  $G$  e  $v_{e_1}, \dots, v_{e_m}$  os vértices de  $\mathcal{L}(G)$ . Defina  $\psi : V(\mathcal{L}(G)) \rightarrow V(\mathcal{H}_G)$  por  $\psi(v_{e_i}) = \{e_i\}$ , para  $1 \leq i \leq m$ . Por definição,  $\psi$  é uma bijeção. Vamos verificar que  $\psi$  é um isomorfismo de grafos. Sejam  $v_{e_i}$  e  $v_{e_j}$  vértices de  $\mathcal{L}(G)$ . Temos que  $v_{e_i} \sim v_{e_j}$  se, e somente se,  $e_i$  e  $e_j$  são arestas adjacentes em  $G$ , ou seja,  $e_i e_j$  é um caminho de  $G$ . Do Teorema 2.27, isso é equivalente a dizer que  $\{e_i\} \sim \{e_j\}$  em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ . Mas isso ocorre se, e somente se,  $\{e_i\} \sim \{e_j\}$  em  $\mathcal{H}_G$ , pois este é um subgrafo induzido. Logo,  $\psi$  é um isomorfismo de grafos.  $\square$

Em vista do Teorema 6.8, vamos dizer que  $\mathcal{L}(G)$  é um subgrafo induzido de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ .

Seja  $e$  uma aresta qualquer de um grafo  $G$ . Definimos a aplicação  $\varphi_e : V(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))) \rightarrow V(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)))$  da seguinte forma:

$$\varphi_e(M) = \begin{cases} M, & \text{se } M \cap I(e) \neq \emptyset, \\ M \Delta \{e\}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (6.1)$$

A seguir, enumeramos algumas propriedades de  $\varphi_e$ :

- (1)  $\varphi_e(\{e\}) = \emptyset$  e  $\varphi_e(\emptyset) = \{e\}$ ;
- (2) Dado um emparelhamento  $M$  de  $G$ , se  $e \in M$ , então  $\varphi_e(M) = M \setminus \{e\}$  e  $\varphi_e(M \setminus \{e\}) = M$ ;
- (3) Se  $e \notin M$  e qualquer aresta de  $M$  não é adjacente a  $e$ , então  $\varphi_e(M) = M \cup \{e\}$  e  $\varphi_e(M \cup \{e\}) = M$ ;
- (4) Se  $e \notin M$  e existe uma aresta  $f \in M$  adjacente a  $e$ , então  $\varphi_e(M) = M$ .

A partir das propriedades anteriores, obtemos que  $\varphi_e^2 = id$ , ou seja,  $\varphi_e(\varphi_e(M)) = M$ , para todo  $M \in V(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)))$ . Logo,  $\varphi_e$  é uma bijeção.

**Exemplo 6.9.** Seja  $G$  o grafo da Figura 6.5. Para as arestas  $e_2$ ,  $e_4$  e  $e_5$ , temos  $I(e_2) = \{e_1, e_3\}$ ,  $I(e_4) = \{e_1, e_3, e_5\}$  e  $I(e_5) = \{e_4\}$ . A Tabela 6.1 mostra as aplicações  $\varphi_{e_2}$ ,  $\varphi_{e_4}$  e  $\varphi_{e_5}$ . Observamos que  $\varphi_{e_2}$  e  $\varphi_{e_5}$  preservam adjacências. Por exemplo,  $\{e_4\} \sim \{e_5\}$ ,  $\varphi_{e_2}(\{e_4\}) = \{e_2, e_4\} \sim \{e_2, e_5\} = \varphi_{e_2}(\{e_5\})$ . Por outro lado,  $\varphi_{e_4}$  não satisfaz esta propriedade. Veja que  $\{e_4\} \sim \{e_1, e_5\}$ , no entanto  $\varphi_{e_4}(\{e_4\}) = \emptyset \not\sim \{e_1, e_5\} = \varphi_{e_4}(\{e_1, e_5\})$ .

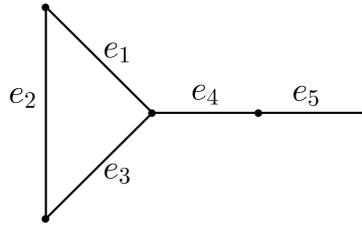


Figura 6.5: Grafo com aresta pendente e elo

$M$	$\varphi_{e_2}(M)$	$\varphi_{e_5}(M)$	$\varphi_{e_4}(M)$
$\emptyset$	$\{e_2\}$	$\{e_5\}$	$\{e_4\}$
$\{e_1\}$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_5\}$	$\{e_1\}$
$\{e_2\}$	$\emptyset$	$\{e_2, e_5\}$	$\{e_2, e_4\}$
$\{e_3\}$	$\{e_3\}$	$\{e_3, e_5\}$	$\{e_3\}$
$\{e_4\}$	$\{e_2, e_4\}$	$\{e_4\}$	$\emptyset$
$\{e_5\}$	$\{e_2, e_5\}$	$\emptyset$	$\{e_5\}$
$\{e_1, e_5\}$	$\{e_1, e_5\}$	$\{e_1\}$	$\{e_1, e_5\}$
$\{e_2, e_4\}$	$\{e_4\}$	$\{e_2, e_4\}$	$\{e_2\}$
$\{e_2, e_5\}$	$\{e_5\}$	$\{e_2\}$	$\{e_2, e_5\}$
$\{e_3, e_5\}$	$\{e_3, e_5\}$	$\{e_3\}$	$\{e_3, e_5\}$

Tabela 6.1:  $\varphi_{e_2}$ ,  $\varphi_{e_5}$  e  $\varphi_{e_4}$

**Teorema 6.10.** A aplicação  $\varphi_e$  é um automorfismo de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  se, e somente se,  $e$  é uma aresta pendente ou um elo de  $G$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $e$  seja uma aresta pendente ou um elo de  $G$ . Como já observamos,  $\varphi_e$  é uma bijeção. Para verificar que esta aplicação é um automorfismo, devemos provar que dois vértices  $M_1$  e  $M_2$  são adjacentes se, e somente se,  $\varphi_e(M_1)$  é adjacente a  $\varphi_e(M_2)$ . Sendo  $\varphi_e^2 = id$ , é suficiente mostrar que, se  $M_1 \sim M_2$ , então  $\varphi_e(M_1) \sim \varphi_e(M_2)$ .

Sejam  $M_1$  e  $M_2$  dois vértices adjacentes. Do Teorema 2.28, basta verificar que  $\varphi_e(M_1) \sim \varphi_e(M_2)$  é conexo. Isso é óbvio caso  $\varphi_e(M_1) \Delta \varphi_e(M_2) = M_1 \Delta M_2$ . Consideremos dois casos:

(1)  $e \in M_1$ : neste caso,  $\varphi_e(M_1) = M_1 \setminus \{e\}$ . Se  $e$  também pertence a  $M_2$ , então  $\varphi_e(M_2) = M_2 \setminus \{e\}$ . Portanto,  $\varphi_e(M_1) \Delta \varphi_e(M_2) = M_1 \Delta M_2$ . Se  $e \notin M_2$ , temos duas possibilidades:

- (a)  $M \cap I(e) = \emptyset$ : então,  $\varphi_e(M_2) = M_2 \cup \{e\}$  e novamente,  $\varphi_e(M_1) \Delta \varphi_e(M_2) = M_1 \Delta M_2$ .  
(b)  $M \cap I(e) \neq \emptyset$ : neste caso,  $\varphi_e(M_2) = M_2$ . Portanto,  $\varphi_e(M_1) \Delta \varphi_e(M_2) = (M_1 \Delta M_2) \setminus \{e\}$ . Como  $M_1 \Delta M_2$  é conexo e a aresta  $e$  é pendente ou um elo, obtemos que  $\varphi_e(M_1) \Delta \varphi_e(M_2)$  é conexo.

(2)  $e \notin M_1$  e  $e \notin M_2$ : neste caso,  $\varphi_e(M_i) = M_i$  ou  $\varphi_e(M_i) = M_i \cup \{e\}$ , dependendo se  $M_i$  possui ou não aresta adjacente à aresta  $e$ , para  $i = 1, 2$ . Claramente, se tanto para  $i = 1$  e  $i = 2$ , temos a mesma possibilidade, então  $\varphi_e(M_1) \Delta \varphi_e(M_2) = M_1 \Delta M_2$ . Assim, basta verificar o caso em que alguma aresta de  $M_1$  é adjacente a  $e$ , e nenhuma aresta de  $M_2$  é adjacente a  $e$  (ou vice-versa), ou seja:  $\varphi_e(M_1) = M_1$  e  $\varphi_e(M_2) = M_2 \cup \{e\}$ . Neste caso,  $\varphi_e(M_1) \Delta \varphi_e(M_2) = (M_1 \Delta M_2) \cup \{e\}$ . Como  $M_1 \Delta M_2$  é conexo e contém alguma aresta (de  $M_1$ ) adjacente à aresta  $e$ , concluímos que  $\varphi_e(M_1) \Delta \varphi_e(M_2)$  é conexo. Se alguma aresta de  $M_2$  é adjacente a  $e$ , e nenhuma aresta de  $M_1$  é adjacente a  $e$ , obtemos o resultado analogamente.

Por fim, seja  $e$  uma aresta de  $G$  que não é um elo e nem pendente. Neste caso, existem duas arestas  $f, g \in E(G)$  tais que  $feg$  é um caminho. Façamos  $M_1 = \{e\}$  e  $M_2 = \{f, g\}$ , ou seja,  $M_1$  e  $M_2$  são emparelhamentos de  $G$  adjacentes em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ . Por outro lado,  $\varphi_e(M_1) = \emptyset \not\sim \{f, g\} = \varphi_e(M_2)$ . Logo,  $\varphi_e$  não é um automorfismo de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ .  $\square$

Dado um grafo  $G$ , do Teorema 4.17, sabemos que além do  $\emptyset$ , todos os emparelhamentos de  $G$  formados somente por arestas pendentes ou elos possuem grau mínimo em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ . Portanto, se há um isomorfismo  $\varphi$  entre  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  e  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G'))$ , pode ser que  $\varphi(\emptyset) \neq \emptyset$ .

**Lema 6.11.** *Se  $G$  e  $G'$  são grafos tais que  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = \mathcal{G}(\mathcal{M}(G'))$  então existe um isomorfismo  $\varphi$  de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G'))$  tal que  $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ .*

*Demonstração.* Seja  $\psi$  um isomorfismo de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G'))$ . Se  $G$  não possui arestas pendentes e nem elos, do Corolário 4.2 e do Teorema 4.17,  $\emptyset$  é o único emparelhamento de  $G$  com grau mínimo em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ . Como  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = \mathcal{G}(\mathcal{M}(G'))$ , temos que  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G'))$  também possui um único vértice com grau mínimo, que deve corresponder necessariamente ao emparelhamento  $\emptyset$  de  $G'$ . Logo,  $\psi(\emptyset) = \emptyset$ .

Suponhamos que  $G$  possui pelo menos uma aresta pendente ou pelo menos um elo. Se  $\psi(\emptyset) \neq \emptyset$ , do Teorema 4.17,  $\psi(\emptyset) = \{e_1, \dots, e_k\}$ , onde cada  $e_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , é uma aresta pendente ou um elo de  $G'$ . Do Teorema 6.10,  $\varphi_{e_k} \circ \varphi_{e_{k-1}} \circ \dots \circ \varphi_{e_2} \circ \varphi_{e_1}$  é um automorfismo de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G'))$  e, portanto,  $\varphi = \varphi_{e_k} \circ \varphi_{e_{k-1}} \circ \dots \circ \varphi_{e_2} \circ \varphi_{e_1} \circ \psi$  é um isomorfismo de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G'))$ . Como  $\psi(\emptyset) = \{e_1, \dots, e_k\}$ , basta então observar que  $\varphi_{e_i}(\{e_i, \dots, e_k\}) = \{e_{i+1}, \dots, e_k\}$ , para  $1 \leq i \leq k-1$ , e que  $\varphi_{e_k}(\{e_k\}) = \emptyset$ . Logo,  $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ .  $\square$

Finalmente, no teorema a seguir mostramos que  $K_3$  e  $S_{1,3}$  são os únicos grafos conexos não isomorfos com EPEs isomorfos. Para isso utilizaremos o Teorema de Whitney (Teorema 2.4), que afirma que, se  $G$  e  $G'$  são grafos conexos e  $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G')$ , então  $G = G'$ , a exceção dos grafos  $K_3$  e  $S_{1,3}$ .

**Teorema 6.12.** *Sejam  $G$  e  $G'$  grafos conexos. Se  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = \mathcal{G}(\mathcal{M}(G'))$ , então  $G$  e  $G'$  são isomorfos, a exceção dos grafos  $K_3$  e  $S_{1,3}$ .*

*Demonstração.* Sejam  $G$  e  $G'$  grafos conexos cujos EPEs são isomorfos. Seja  $\psi$  um isomorfismo de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G'))$ . Como  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  e  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G'))$  possuem o mesmo grau mínimo, do Corolário 4.13,  $G$  e  $G'$  possuem o mesmo número de arestas. Do Lema 6.11, podemos supor que  $\psi(\emptyset) = \emptyset$ . Seja  $e$  uma aresta qualquer de  $G$ . Como  $\{e\} \sim \emptyset$  em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ ,  $\psi(\{e\}) \sim \psi(\emptyset)$  em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G'))$ . Como  $\psi(\emptyset) = \emptyset$ , da Proposição 4.1,  $\psi(\{e\}) = \{f\}$  é um emparelhamento unitário de  $G'$ . Isso implica que  $\psi$  leva vértices de  $\mathcal{L}(G)$  em vértices de  $\mathcal{L}(G')$ . Como  $|E(G)| = |E(G')|$ , ou seja,  $|V(\mathcal{L}(G))| = |V(\mathcal{L}(G'))|$ , obtemos que  $\psi$  é uma bijeção entre os vértices de  $\mathcal{L}(G)$  e  $\mathcal{L}(G')$ . Por outro lado, sendo  $\psi$  um isomorfismo entre  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  e  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G'))$ , concluímos que  $\psi$  é um isomorfismo entre  $\mathcal{L}(G)$  e  $\mathcal{L}(G')$ . Do Teorema 2.4,  $G$  e  $G'$  são isomorfos, a exceção dos grafos  $K_3$  e  $S_{1,3}$ .  $\square$

Para finalizar esta seção, vamos mostrar que existe uma família com infinitos pares de grafos não isomorfos cujos esqueletos são isomorfos. O par  $K_3$  e  $S_{1,3}$  faz parte desta família e como são os únicos grafos conexos com tal propriedade, todos os demais grafos são desconexos.

Como já observamos anteriormente, se  $G$  é um grafo que não contém ciclo par, então dois emparelhamentos  $M$  e  $N$  de  $G$  são adjacentes no  $\text{EPE}(G)$  se, e somente se,  $M\Delta N$  é um caminho. Portanto, se cada componente conexa de  $G$  é  $K_3$  ou uma estrela  $S_{1,n}$ , então  $M \sim N$  se, e somente se,  $M\Delta N$  é um caminho com uma ou duas arestas.

**Teorema 6.13.** *Se  $G$  e  $H$  são dois grafos com o mesmo número de componentes conexas tais que cada uma destas componentes é um grafo isomorfo a  $K_3$  ou a  $S_{1,3}$ , então  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = \mathcal{G}(\mathcal{M}(H))$ .*

*Demonstração.* Sejam  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$  e  $H = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_k$  grafos tais que cada  $G_i$  e cada  $H_j$  é  $S_{1,3}$  ou  $K_3$ ,  $1 \leq i, j \leq k$ . Fixemos uma ordenação lexicográfica para as arestas de  $G$  e  $H$ :  $E(G_1) = \{e_{11}, e_{12}, e_{13}\}, \dots, E(G_k) = \{e_{k1}, e_{k2}, e_{k3}\}$ , e  $E(H_1) = \{f_{11}, f_{12}, f_{13}\}, \dots, E(H_k) = \{f_{k1}, f_{k2}, f_{k3}\}$ .

Vamos definir uma função  $\varphi : V(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))) \rightarrow V(\mathcal{G}(\mathcal{M}(H)))$  da seguinte forma:

$$\varphi(M) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } M = \emptyset; \\ \{f_{ij}\}, & \text{se } M = \{e_{ij}\}, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq 3; \\ \{f_{i_1j_1}, \dots, f_{i_sj_s}\}, & \text{se } M = \{e_{i_1j_1}, \dots, e_{i_sj_s}\}, s \geq 2, 1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq k \text{ e, para} \\ & 1 \leq t \leq s, 1 \leq j_t \leq 3. \end{cases} \quad (6.2)$$

Por construção,  $\varphi$  é uma função bem definida e é uma bijeção. Falta verificar que, tanto  $\varphi$  quanto sua inversa, preservam adjacências.

Sejam  $M$  e  $M'$  emparelhamentos de  $G$  tais que  $M \sim M'$ . Se  $M = \emptyset$ , então  $M' = \{e_{ij}\}$ , para alguma aresta  $e_{ij}$  de  $G$ . Como  $\varphi(M) = \emptyset$  e  $\varphi(M') = \{f_{ij}\}$ , obtemos que  $\varphi(M) \sim \varphi(M')$ . Suponhamos que  $M \neq \emptyset$  e  $M' \neq \emptyset$ . Como observado antes,  $M\Delta M' = P$ , um caminho com uma ou duas arestas de  $G$ . Vamos analisar as duas possibilidades.

1) Se  $P = e_{lr}$ , para alguma aresta  $e_{lr} \in E(G)$ , então  $M' = M \setminus \{e_{lr}\}$  (ou vice-versa). Sem perda de generalidade, podemos supor  $M = \{e_{i_1j_1}, \dots, e_{i_sj_s}, e_{lr}\}$  e  $M' = \{e_{i_1j_1}, \dots, e_{i_sj_s}\}$ . Portanto,  $\varphi(M) = \{f_{i_1j_1}, \dots, f_{i_sj_s}, f_{lr}\}$  e  $\varphi(M') = \{f_{i_1j_1}, \dots, f_{i_sj_s}\}$ . Logo,  $\varphi(M)\Delta\varphi(M') = f_{lr}$ , o que implica  $\varphi(M) \sim \varphi(M')$ .

2) Se  $P$  possui duas arestas, estas devem pertencer à mesma componente conexa  $G_l$ , donde  $P = e_{lr}e_{ls}$ , onde  $e_{lr} \in M$  e  $e_{ls} \in M'$ , pra certos  $1 \leq l \leq k$  e  $1 \leq r < s \leq 3$ . Assim,  $M = \{e_{i_1j_1}, \dots, e_{i_sj_s}, e_{lr}\}$  e  $M' = \{e_{i_1j_1}, \dots, e_{i_sj_s}, e_{ls}\}$ . Portanto,  $\varphi(M) = \{f_{i_1j_1}, \dots, f_{i_sj_s}, f_{lr}\}$  e  $\varphi(M') = \{f_{i_1j_1}, \dots, f_{i_sj_s}, f_{ls}\}$ . Logo,  $\varphi(M)\Delta\varphi(M') = f_{lr}, f_{ls}$  é um caminho em  $H_l$ , e obtemos que  $\varphi(M) \sim \varphi(M')$ .

Por fim, como a aplicação  $\varphi^{-1}$  é definida de forma similar, também preserva adjacências.  $\square$

Notemos que, dado qualquer grafo  $G'$ , se  $G = G' \cup G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$  e  $H = G' \cup H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_k$ , sendo cada  $G_i$  e  $H_j$  um grafo isomorfo a  $S_{1,3}$  ou  $K_3$ ,  $1 \leq i, j \leq k$ , então  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = \mathcal{G}(\mathcal{M}(H))$ .

**Exemplo 6.14.** *Seja  $G = K_3 \cup 2S_{1,3}$  e  $H = 2K_3 \cup S_{1,3}$ . Do teorema anterior,  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = \mathcal{G}(\mathcal{M}(H))$ , apesar de  $G$  e  $H$  não serem isomorfos.*

# Capítulo 7

## Considerações finais

Nos capítulos anteriores apresentamos alguns resultados sobre o esqueleto do politopo de emparelhamentos de um grafo  $G$ . Destacamos aqui as nossas principais contribuições e indicamos algumas possibilidades para trabalhos futuros.

No Capítulo 3, apresentamos os nossos primeiros resultados, obtidos para classes especiais de grafos. Iniciamos com alguns exemplos e depois passamos ao estudo de propriedades de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ , nos casos em que o grafo  $G$  é um dos grafos  $P_{n,t}^i$ ,  $P_n^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ ,  $S_n^k$  ou  $B_p$ . Para os dois primeiros, determinamos o número de vértices dos esqueletos  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ . Para os demais, obtivemos o número de vértices e o grau mínimo dos respectivos EPEs.

No Capítulo 4, generalizamos para um grafo qualquer alguns resultados conhecidos para árvores. Para calcular o grau de um emparelhamento  $M$  de um grafo  $G$ , exibimos um processo que depende somente da contagem de certos tipos de caminhos e ciclos de  $G$ . Provamos que, se  $G$  possui  $m$  arestas, então  $\delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))) = m$  e encontramos todos os emparelhamentos de  $G$  que possuem este grau. Por último, mostramos que  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  é regular se, e somente se,  $G$  é uma união de estrelas ou triângulos.

No Capítulo 5, determinamos o grau de um emparelhamento por meio dos graus de emparelhamentos de menor cardinalidade. Para isso, definimos uma relação de equivalência no conjunto das arestas de um emparelhamento dado. Mostramos que existe um emparelhamento maximal de  $G$  com grau máximo em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  e determinamos os graus máximos dos emparelhamentos dos ciclos e grafos completos. Desta forma, obtivemos um limite superior para o grau máximo do EPE de qualquer grafo com  $n$  vértices, dado por  $\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_n)))$ . Terminamos o capítulo com dois limites inferiores para  $\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)))$ , sendo o primeiro para qualquer grafo e, o segundo, para grafos que possuam árvore geradora com emparelhamento perfeito.

No Capítulo 6, investigamos duas questões: (1) verificamos condições para que um grafo  $H$  realize o EPE de algum grafo  $G$ ; (2) investigamos quando  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = \mathcal{G}(\mathcal{M}(G'))$  implica  $G = G'$ . Para a primeira questão, encontramos grafos que realizam EPEs (por exemplo, os  $n$ -cubos), e grafos que não realizam EPEs (por exemplo,  $C_n$ ,  $n \geq 5$ ). Para grafos conexos, respondemos totalmente a segunda questão, mostrando

que  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)) = \mathcal{G}(\mathcal{M}(G'))$  implica  $G = G'$ , com exceção dos grafos  $K_3$  e  $S_{1,3}$ .

Durante o nosso trabalho, sentimos a necessidade de desenvolver um software capaz de nos auxiliar no cálculo dos graus dos vértices de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ , dado que o número de vértices destes grafos cresce numa proporção muito grande em relação ao número de arestas do grafo  $G$ . Desenvolvemos então o software *EpemGraph*, que ainda se encontra em fase de testes. Tal software está sendo desenvolvido em colaboração com os professores Tiago Araújo Neves (UFF) e Diego Nunes Brandão (CEFET/RJ). O programa, escrito em linguagem de programação JAVA, se baseia no Teorema 2.28 para listar os vértices e arestas de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  e calcular o grau de cada vértice. Pretendemos no futuro disponibilizar o software à comunidade acadêmica, para que este auxilie os pesquisadores na busca por novos resultados sobre o esqueleto do politopo de emparelhamentos de um grafo  $G$ . Para ilustrarmos o funcionamento do software *EpemGraph*, exibimos no Apêndice A alguns exemplos por ele realizados.

No Apêndice B, incluímos três tabelas: a Tabela B.1 usa o Teorema 6.2 para listar todos os grafos planares que realizam EPEs. Na Tabela B.2 encontram-se algumas classes de grafos com seus respectivos EPEs (se conhecidos), graus mínimo e máximo. Nela estão indicados os resultados já conhecidos e aqueles que são contribuições desta tese. A Tabela B.3 mostra os graus mínimo e máximo dos EPEs de todos os grafos conexos com ordem de 2 a 5.

Por fim, sugerimos algumas propostas de pesquisa a serem desenvolvidas futuramente:

- Investigar propriedades dos emparelhamentos de um grafo  $G$  cujos correspondentes vértices no esqueleto  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  têm grau máximo;
- Verificar se é possível caracterizar os grafos que realizam EPEs através de subgrafos proibidos;
- Estudar os subgrafos induzidos de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  pelos emparelhamentos maximais e/ou máximos de  $G$ ;
- Investigar o espectro de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$  em função de propriedades estruturais ou espectrais de  $G$ ;
- Aperfeiçoar o software *EpemGraph* e realizar o registro junto ao Instituto Nacional da Propriedade Industrial (INPI). Disponibilizar o software para que seja uma ferramenta computacional sob licença de acesso público (software livre).

# Apêndice A

## Software *EpemGraph*

Apresentamos neste apêndice alguns exemplos feitos no software *EpemGraph*. Os vértices do grafo  $G$  são rotulados como  $V = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ . Por exemplo, para o caminho  $P_4$  (veja a Figura A.1), temos  $V = \{0, 1, 2, 3\}$  e os seus emparelhamentos são:  $\emptyset, \{0 - 1\}, \{1 - 2\}, \{2 - 3\}$  e  $\{0 - 1, 2 - 3\}$ . Como a interface gráfica ainda está em desenvolvimento, precisamos entrar com os dados do grafo  $G$  através de linha de comando. Os dados de saída podem ser salvos em formato de texto (.txt).

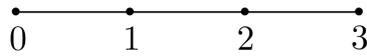


Figura A.1: Caminho  $P_4$

### A.1 $P_4$

Dados de entrada (parte do código do *EpemGraph*)

```
public class main
{ //Início da Classe
public static void main(String[] args) {
Grafo g1=new Grafo();
//Vértices
for(int i=0;i<4;i++)
{
Vertice v1 = new Vertice();
v1.id = i;
g1.vertices.add(v1);
}
```

```

//Arestas
for(int i=0;i<3;i++)
{
Aresta a1=new Aresta();
a1.id=i;
a1.vertice1=i;
a1.vertice2=i+1;
g1.arestas.add(a1);
}

```

Saída (arquivo no formato .txt gerado pelo *EpemGraph*)

Conjunto de Vértices

id:Emparelhamento

0:Vazio

1:0-1

2:1-2

3:2-3

4:0-1,2-3

Conjunto de Arestas: ligações são referentes aos ids dos vértices

0:1-2

1:2-3

2:0-1

3:0-2

4:0-3

5:1-4

6:2-4

7:3-4

*ID Grau Arestas do emparelhamento*

0	3	Vazio
1	3	0 – 1
3	3	2 – 3
4	3	0 – 1, 2 – 3
2	4	1 – 2

## A.2 Grafo $G$

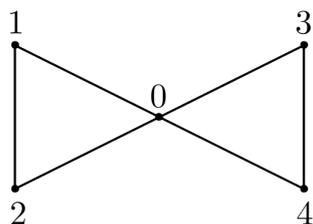


Figura A.2: Grafo  $G$

Conjunto de Vértices

id:Emparelhamento

0:Vazio

1:0-1

2:0-2

3:0-3

4:0-4

5:1-2

6:3-4

7:0-1,3-4

8:0-2,3-4

9:0-3,1-2

10:0-4,1-2

11:1-2,3-4

*ID Grau Arestas do emparelhamento*

0	6	Vazio
5	6	1-2
6	6	3-4
11	6	1-2,3-4
4	8	0-4
1	8	0-1
2	8	0-2
7	8	0-1,3-4
8	8	0-2,3-4
9	8	0-3,1-2
10	8	0-4,1-2
3	8	0-3

### A.3 $C_5$

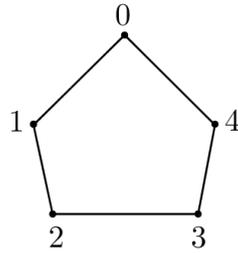


Figura A.3:  $C_5$

Conjunto de Vértices

id:Emparelhamento

0:Vazio

1:0-1

2:1-2

3:2-3

4:3-4

5:0-4

6:0-1,2-3

7:0-1,3-4

8:1-2,3-4

9:0-4,1-2

10:0-4,2-3

*ID Grau Arestas do emparelhamento*

0	5	Vazio
1	6	0-1
2	6	1-2
3	6	2-3
4	6	3-4
5	6	0-4
6	7	0-1,2-3
7	7	0-1,3-4
8	7	1-2,3-4
9	7	0-4,1-2
10	7	0-4,2-3

### A.4 $K_6$

<i>ID</i>	<i>Grau</i>	<i>Arestas do emparelhamento</i>	<i>ID</i>	<i>Grau</i>	<i>Arestas do emparelhamento</i>
0	15	Vazio	38	45	0-4,2-5
1	27	0-1	39	45	0-4,3-5
2	27	0-2	40	45	0-5,1-2
3	27	0-3	41	45	0-5,1-3
4	27	0-4	42	45	0-5,1-4
5	27	0-5	43	45	0-5,2-3
6	27	1-2	44	45	0-5,2-4
7	27	1-3	45	45	0-5,3-4
8	27	1-4	46	45	1-2,3-4
9	27	1-5	47	45	1-2,3-5
10	27	2-3	48	45	1-2,4-5
11	27	2-4	49	45	1-3,2-4
12	27	2-5	50	45	1-3,2-5
13	27	3-4	51	45	1-3,4-5
14	27	3-5	52	45	1-4,2-3
15	27	4-5	53	45	1-4,2-5
16	45	0-1,2-3	54	45	1-4,3-5
17	45	0-1,2-4	55	45	1-5,2-3
18	45	0-1,2-5	56	45	1-5,2-4
19	45	0-1,3-4	57	45	1-5,3-4
20	45	0-1,3-5	58	45	2-3,4-5
21	45	0-1,4-5	59	45	2-4,3-5
22	45	0-2,1-3	60	45	2-5,3-4
23	45	0-2,1-4	61	53	0-1,2-3,4-5
24	45	0-2,1-5	62	53	0-1,2-4,3-5
25	45	0-2,3-4	63	53	0-1,2-5,3-4
26	45	0-2,3-5	64	53	0-2,1-3,4-5
27	45	0-2,4-5	65	53	0-2,1-4,3-5
28	45	0-3,1-2	66	53	0-2,1-5,3-4
29	45	0-3,1-4	67	53	0-3,1-2,4-5
30	45	0-3,1-5	68	53	0-3,1-4,2-5
31	45	0-3,2-4	69	53	0-3,1-5,2-4
32	45	0-3,2-5	70	53	0-4,1-2,3-5
33	45	0-3,4-5	71	53	0-4,1-3,2-5
34	45	0-4,1-2	72	53	0-4,1-5,2-3
35	45	0-4,1-3	73	53	0-5,1-2,3-4
36	45	0-4,1-5	74	53	0-5,1-3,2-4
37	45	0-4,2-3	75	53	0-5,1-4,2-3

## A.5 $K_3 \cup S_{1,1}$

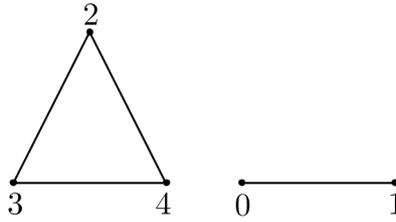


Figura A.4:  $K_3 \cup S_{1,1}$

ID	Grau	Arestas do emparelhamento
0	4	Vazio
1	4	0-1
2	4	2-3
3	4	3-4
4	4	2-4
5	4	0-1, 2-3
6	4	0-1, 3-4
7	4	0-1, 2-4

## A.6 Grafo de Petersen

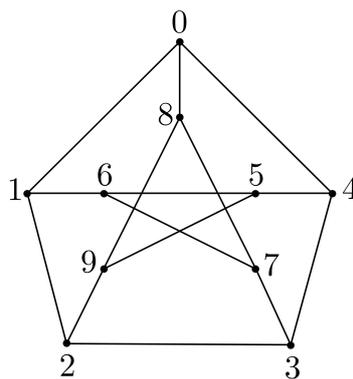


Figura A.5: Grafo de Petersen

<i>ID</i>	<i>Grau</i>	<i>Arestas do emparelhamento</i>	<i>ID</i>	<i>Grau</i>	<i>Arestas do emparelhamento</i>
0	15	Vazio	38	26	2-3,6-7
1	19	0-1	39	26	2-3,7-8
2	19	1-2	40	26	2-3,8-9
3	19	2-3	41	26	2-3,5-9
4	19	3-4	21	26	0-1,8-9
5	19	0-4	43	26	1-6,2-3
6	19	5-6	44	26	2-3,4-5
7	19	6-7	45	26	3-4,5-6
8	19	7-8	46	26	3-4,6-7
9	19	8-9	47	26	3-4,7-8
10	19	5-9	16	26	0-1,2-3
11	19	0-8	49	26	3-4,5-9
12	19	1-6	50	26	0-8,3-4
13	19	2-9	23	26	0-1,2-9
14	19	3-7	52	26	2-9,3-4
15	19	4-5	53	26	0-4,5-6
22	23	0-1,5-9	17	26	0-1,3-4
24	23	0-1,3-7	55	26	0-4,7-8
30	23	1-2,7-8	56	26	0-4,8-9
35	23	1-2,4-5	57	26	0-4,5-9
37	23	2-3,5-6	58	26	0-4,1-6
42	23	0-8,2-3	25	26	0-1,4-5
48	23	3-4,8-9	60	26	0-4,3-7
51	23	1-6,3-4	61	26	5-6,7-8
54	23	0-4,6-7	62	26	5-6,8-9
59	23	0-4,2-9	26	26	1-2,3-4
63	23	0-8,5-6	64	26	2-9,5-6
69	23	2-9,6-7	65	26	3-7,5-6
74	23	3-7,5-9	66	26	6-7,8-9
80	23	1-6,8-9	67	26	5-9,6-7
89	23	4-5,7-8	68	26	0-8,6-7
31	26	1-2,8-9	27	26	0-4,1-2
32	26	1-2,5-9	70	26	5-9,7-8
33	26	0-8,1-2	71	26	2-9,7-8
34	26	1-2,3-7	72	26	0-8,5-9
19	26	0-1,6-7	73	26	1-6,5-9
36	26	0-4,2-3	28	26	1-2,5-6
20	26	0-1,7-8	75	26	0-8,1-6

<i>ID</i>	<i>Grau</i>	<i>Arestas do emparelhamento</i>	<i>ID</i>	<i>Grau</i>	<i>Arestas do emparelhamento</i>
76	26	0-8,2-9	145	33	1-2,3-7,5-9
77	26	0-8,3-7	147	33	0-8,1-2,4-5
78	26	0-8,4-5	148	33	1-2,3-7,4-5
79	26	1-6,7-8	149	33	0-4,2-3,5-6
29	26	1-2,6-7	150	33	0-4,2-3,6-7
81	26	1-6,2-9	155	33	2-3,5-6,7-8
82	26	1-6,3-7	156	33	2-3,5-6,8-9
83	26	1-6,4-5	100	33	0-1,3-4,8-9
84	26	2-9,3-7	160	33	0-8,2-3,6-7
85	26	2-9,4-5	164	33	2-3,4-5,7-8
86	26	3-7,8-9	165	33	1-6,2-3,8-9
87	26	3-7,4-5	167	33	0-8,2-3,5-9
88	26	4-5,6-7	169	33	0-8,1-6,2-3
18	26	0-1,5-6	170	33	0-8,2-3,4-5
90	26	4-5,8-9	173	33	3-4,5-6,8-9
116	27	0-1,3-7,5-9	174	33	0-8,3-4,5-6
141	27	1-2,4-5,7-8	176	33	3-4,6-7,8-9
157	27	0-8,2-3,5-6	179	33	2-9,3-4,6-7
183	27	1-6,3-4,8-9	181	33	1-6,3-4,7-8
195	27	0-4,2-9,6-7	101	33	0-1,3-4,5-9
108	33	0-1,5-9,6-7	185	33	1-6,3-4,5-9
109	33	0-1,2-9,6-7	186	33	0-8,1-6,3-4
111	33	0-1,5-9,7-8	188	33	1-6,2-9,3-4
113	33	0-1,4-5,7-8	191	33	0-4,2-9,5-6
114	33	0-1,3-7,8-9	193	33	0-4,6-7,8-9
91	33	0-1,2-3,5-6	194	33	0-4,5-9,6-7
117	33	0-1,2-9,3-7	106	33	0-1,3-7,5-6
119	33	0-1,3-7,4-5	198	33	0-4,2-9,7-8
122	33	1-2,3-4,7-8	199	33	0-4,1-6,8-9
123	33	1-2,3-4,8-9	202	33	0-4,3-7,5-9
127	33	0-4,1-2,6-7	203	33	0-4,1-6,2-9
128	33	0-4,1-2,7-8	205	33	0-4,2-9,3-7
132	33	1-2,5-6,7-8	208	33	0-8,2-9,5-6
134	33	0-8,1-2,5-6	209	33	0-8,3-7,5-6
139	33	1-2,4-5,6-7	212	33	0-8,2-9,6-7
140	33	1-2,5-9,7-8	214	33	2-9,4-5,6-7
95	33	0-1,2-3,5-9	217	33	2-9,4-5,7-8
143	33	1-2,4-5,8-9	219	33	0-8,3-7,5-9

<i>ID</i>	<i>Grau</i>	<i>Arestas do emparelhamento</i>	<i>ID</i>	<i>Grau</i>	<i>Arestas do emparelhamento</i>
220	33	1 – 6,3 – 7,5 – 9	190	40	0 – 4,5 – 6,8 – 9
227	33	1 – 6,4 – 5,7 – 8	151	40	0 – 4,2 – 3,7 – 8
228	33	1 – 6,3 – 7,8 – 9	192	40	0 – 4,3 – 7,5 – 6
229	33	1 – 6,4 – 5,8 – 9	96	40	0 – 1,2 – 3,4 – 5
159	37	2 – 3,5 – 9,6 – 7	153	40	0 – 4,2 – 3,5 – 9
180	37	3 – 4,5 – 9,7 – 8	154	40	0 – 4,1 – 6,2 – 3
146	37	0 – 8,1 – 2,3 – 7	196	40	0 – 4,5 – 9,7 – 8
204	37	0 – 4,1 – 6,3 – 7	197	40	0 – 4,1 – 6,7 – 8
93	37	0 – 1,2 – 3,7 – 8	112	40	0 – 1,2 – 9,7 – 8
136	37	1 – 2,6 – 7,8 – 9	129	40	0 – 4,1 – 2,8 – 9
98	37	0 – 1,3 – 4,6 – 7	200	40	0 – 4,3 – 7,8 – 9
210	37	2 – 9,3 – 7,5 – 6	201	40	0 – 4,1 – 6,5 – 9
187	37	0 – 8,2 – 9,3 – 4	102	40	0 – 1,2 – 9,3 – 4
213	37	0 – 8,4 – 5,6 – 7	158	40	2 – 3,6 – 7,8 – 9
118	37	0 – 1,2 – 9,4 – 5	131	40	0 – 4,1 – 2,3 – 7
216	37	1 – 6,2 – 9,7 – 8	103	40	0 – 1,5 – 6,7 – 8
189	37	0 – 4,5 – 6,7 – 8	206	40	2 – 9,5 – 6,7 – 8
218	37	0 – 8,1 – 6,5 – 9	207	40	3 – 7,5 – 6,8 – 9
152	37	0 – 4,2 – 3,8 – 9	161	40	2 – 3,4 – 5,6 – 7
171	37	1 – 6,2 – 3,4 – 5	162	40	2 – 3,5 – 9,7 – 8
104	37	0 – 1,5 – 6,8 – 9	163	40	1 – 6,2 – 3,7 – 8
130	37	0 – 4,1 – 2,5 – 9	211	40	0 – 8,5 – 9,6 – 7
120	37	1 – 2,3 – 4,5 – 6	133	40	1 – 2,5 – 6,8 – 9
234	37	3 – 7,4 – 5,8 – 9	115	40	0 – 1,4 – 5,8 – 9
107	40	0 – 1,6 – 7,8 – 9	166	40	2 – 3,4 – 5,8 – 9
177	40	3 – 4,5 – 9,6 – 7	215	40	1 – 6,5 – 9,7 – 8
178	40	0 – 8,3 – 4,6 – 7	135	40	1 – 2,3 – 7,5 – 6
142	40	1 – 2,3 – 7,8 – 9	168	40	1 – 6,2 – 3,5 – 9
99	40	0 – 1,3 – 4,7 – 8	97	40	0 – 1,3 – 4,5 – 6
144	40	0 – 8,1 – 2,5 – 9	137	40	1 – 2,5 – 9,6 – 7
182	40	2 – 9,3 – 4,7 – 8	138	40	0 – 8,1 – 2,6 – 7
121	40	1 – 2,3 – 4,6 – 7	221	40	0 – 8,1 – 6,2 – 9
184	40	0 – 8,3 – 4,5 – 9	222	40	0 – 8,1 – 6,3 – 7
92	40	0 – 1,2 – 3,6 – 7	223	40	0 – 8,1 – 6,4 – 5
110	40	0 – 1,4 – 5,6 – 7	224	40	0 – 8,2 – 9,3 – 7
124	40	1 – 2,3 – 4,5 – 9	225	40	0 – 8,2 – 9,4 – 5
125	40	0 – 8,1 – 2,3 – 4	226	40	0 – 8,3 – 7,4 – 5
126	40	0 – 4,1 – 2,5 – 6	172	40	3 – 4,5 – 6,7 – 8

<i>ID</i>	<i>Grau</i>	<i>Arestas do emparelhamento</i>	<i>ID</i>	<i>Grau</i>	<i>Arestas do emparelhamento</i>
105	40	0-1,2-9,5-6	282	53	0-8,1-2,3-7,5-9
94	40	0-1,2-3,8-9	283	53	0-8,1-2,3-7,4-5
230	40	1-6,2-9,3-7	284	53	0-4,2-3,5-6,7-8
231	40	1-6,2-9,4-5	285	53	0-4,2-3,5-6,8-9
232	40	1-6,3-7,4-5	286	53	0-4,2-3,6-7,8-9
233	40	2-9,3-7,4-5	287	53	0-4,2-3,5-9,6-7
175	40	2-9,3-4,5-6	290	53	0-4,1-6,2-3,8-9
235	40	4-5,6-7,8-9	293	53	0-8,2-3,5-9,6-7
236	53	0-1,2-3,5-6,7-8	294	53	0-8,2-3,4-5,6-7
237	53	0-1,2-3,5-6,8-9	296	53	1-6,2-3,4-5,7-8
239	53	0-1,2-3,5-9,6-7	297	53	1-6,2-3,4-5,8-9
241	53	0-1,2-3,5-9,7-8	298	53	0-8,1-6,2-3,5-9
242	53	0-1,2-3,4-5,7-8	299	53	0-8,1-6,2-3,4-5
245	53	0-1,3-4,5-6,8-9	301	53	0-8,2-9,3-4,5-6
247	53	0-1,3-4,6-7,8-9	303	53	0-8,2-9,3-4,6-7
248	53	0-1,3-4,5-9,6-7	304	53	1-6,3-4,5-9,7-8
249	53	0-1,2-9,3-4,6-7	305	53	1-6,2-9,3-4,7-8
250	53	0-1,3-4,5-9,7-8	306	53	0-8,1-6,3-4,5-9
253	53	0-1,3-7,5-6,8-9	307	53	0-8,1-6,2-9,3-4
254	53	0-1,2-9,3-7,5-6	308	53	0-4,2-9,5-6,7-8
256	53	0-1,2-9,4-5,6-7	310	53	0-4,2-9,3-7,5-6
257	53	0-1,2-9,4-5,7-8	312	53	0-4,1-6,2-9,7-8
258	53	0-1,3-7,4-5,8-9	313	53	0-4,1-6,3-7,8-9
259	53	0-1,2-9,3-7,4-5	314	53	0-4,1-6,3-7,5-9
260	53	1-2,3-4,5-6,7-8	315	53	0-4,1-6,2-9,3-7
261	53	1-2,3-4,5-6,8-9	316	53	0-8,2-9,3-7,5-6
262	53	0-8,1-2,3-4,5-6	317	53	0-8,2-9,4-5,6-7
263	53	1-2,3-4,6-7,8-9	318	53	1-6,2-9,4-5,7-8
266	53	1-2,3-4,5-9,7-8	319	53	0-8,1-6,3-7,5-9
268	53	0-4,1-2,5-6,7-8	324	53	1-6,3-7,4-5,8-9
271	53	0-4,1-2,6-7,8-9	246	62	0-1,2-9,3-4,5-6
272	53	0-4,1-2,5-9,6-7	276	62	1-2,3-7,5-6,8-9
273	53	0-4,1-2,5-9,7-8	240	62	0-1,2-3,4-5,6-7
275	53	0-4,1-2,3-7,5-9	255	62	0-1,4-5,6-7,8-9
277	53	0-8,1-2,3-7,5-6	300	62	2-9,3-4,5-6,7-8
278	53	1-2,4-5,6-7,8-9	279	62	0-8,1-2,5-9,6-7
280	53	0-8,1-2,4-5,6-7	302	62	0-8,3-4,5-9,6-7
281	53	1-2,3-7,4-5,8-9	264	62	1-2,3-4,5-9,6-7

<i>ID</i>	<i>Grau</i>	<i>Arestas do emparelhamento</i>
265	62	0 – 8, 1 – 2, 3 – 4, 6 – 7
243	62	0 – 1, 2 – 3, 4 – 5, 8 – 9
267	62	0 – 8, 1 – 2, 3 – 4, 5 – 9
244	62	0 – 1, 3 – 4, 5 – 6, 7 – 8
269	62	0 – 4, 1 – 2, 5 – 6, 8 – 9
309	62	0 – 4, 3 – 7, 5 – 6, 8 – 9
270	62	0 – 4, 1 – 2, 3 – 7, 5 – 6
311	62	0 – 4, 1 – 6, 5 – 9, 7 – 8
238	62	0 – 1, 2 – 3, 6 – 7, 8 – 9
288	62	0 – 4, 2 – 3, 5 – 9, 7 – 8
289	62	0 – 4, 1 – 6, 2 – 3, 7 – 8
251	62	0 – 1, 2 – 9, 3 – 4, 7 – 8
291	62	0 – 4, 1 – 6, 2 – 3, 5 – 9
292	62	2 – 3, 4 – 5, 6 – 7, 8 – 9
252	62	0 – 1, 2 – 9, 5 – 6, 7 – 8
274	62	0 – 4, 1 – 2, 3 – 7, 8 – 9
320	62	0 – 8, 1 – 6, 2 – 9, 3 – 7
321	62	0 – 8, 1 – 6, 2 – 9, 4 – 5
322	62	0 – 8, 1 – 6, 3 – 7, 4 – 5
323	62	0 – 8, 2 – 9, 3 – 7, 4 – 5
295	62	1 – 6, 2 – 3, 5 – 9, 7 – 8
325	62	1 – 6, 2 – 9, 3 – 7, 4 – 5
326	90	0 – 1, 2 – 3, 4 – 5, 6 – 7, 8 – 9
327	90	0 – 1, 2 – 9, 3 – 4, 5 – 6, 7 – 8
328	90	0 – 8, 1 – 2, 3 – 4, 5 – 9, 6 – 7
329	90	0 – 4, 1 – 2, 3 – 7, 5 – 6, 8 – 9
330	90	0 – 4, 1 – 6, 2 – 3, 5 – 9, 7 – 8
331	90	0 – 8, 1 – 6, 2 – 9, 3 – 7, 4 – 5

# Apêndice B

## Alguns grafos e seus EPEs

De acordo com o Teorema 6.2, a Tabela B.1 lista todos os grafos (a menos de vértices isolados) que possuem EPEs planares. Estes, por sua vez, são os únicos grafos planares que realizam EPEs.

Grafo $G$	$\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$
$K_1$	$K_1$
$K_2$	$K_2$
$2K_2$	$C_4 = Q_2$
$S_{1,2}$	$K_3$
$3K_2$	$Q_3$
$S_{1,3}$	$K_4$
$K_3$	$K_4$
$K_2 \cup S_{1,2}$	$H_1$
$P_4$	$H_2$

Tabela B.1: Grafos sem vértices isolados com EPEs planares

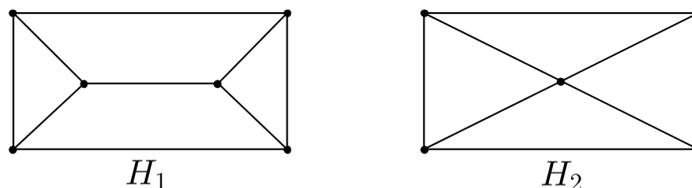


Figura B.1: Grafos  $H_1$  e  $H_2$

A Tabela B.2 apresenta algumas classes de grafos cujos graus mínimo e máximo dos respectivos EPEs são conhecidos ou foram encontrados neste trabalho. Em [6], Abreu et al. mostraram que o  $\text{EPE}(S_{1,n-1})$  é o grafo  $K_n$ . Nesta tese, provamos que o  $\text{EPE}(mK_2)$  é o  $m$ -cubo  $Q_m$ . As demais classes de grafos não possuem EPEs conhecidos e este fato está indicado na tabela com  $\times$ . No Teorema 4.19, mostramos que os grafos  $S_{1,n_1} \cup \dots \cup S_{1,n_j} \cup rK_3$ ,  $j, n_j, r \geq 0$ , são os únicos com EPEs regulares, sendo estes regulares de grau  $3r + \sum_{i=1}^j n_i$ .

Grafo $G$	$\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$	$\delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)))$	$\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)))$	Ref.
$S_{1,n}$	$K_{n+1}$	$n$	$n$	[6]
Starlike $S(n_1, \dots, n_k)$ ( $n+1$ vértices)	$\times$	$n$	$n+1 - \frac{(r+1)^2}{4} + \frac{3n(r^2-1)}{8r}$ , $r$ ímpar $\frac{(r+2)(3n-2r+4)}{8} - 1$ , $r$ par	[7]
$P_n$	$\times$	$n-1$	$\frac{n^2+4n-5}{8}$ , $n$ ímpar $\frac{n^2+6n-8}{8}$ , $n$ par	[6], [7]
Caterpillar $T(q_1, \dots, q_k)$	$\times$	$q_1 + \dots + q_k + k - 1$ *	$\mathcal{N}(k, q_1, \dots, q_k)$ , $k$ par $\max\{\mathcal{N}(k, q_1, \dots, q_k), \mathcal{N}(k, q_k, \dots, q_1)\}$ , $k$ ímpar	[6]
$S_n^k$	$\times$	$n+k-1$	$2n+k-4$	**
Friendship $F_n$ ( $ V  = 2n+1,  E  = 3n$ )	$\times$	$3n$	$5n-2$	**
Book Triangular $B_p$	$\times$	$2p+1$	$p^2+p+1$	**
$C_n$	$\times$	$n$	$\frac{n^2+8n-9}{8}$ , $n$ ímpar $\frac{n^2+4}{4}$ , $n$ par	**
$K_n$	$\times$	$\frac{n^2-n}{2}$	$\frac{n}{2} + \sum_{i=2}^{n/2} 2^{i-1}(i+1)(i-1) \binom{n/2}{i}$ , $n$ par $\frac{3n-3}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} 2^{i-1}(i-1)(3i+1) \binom{n-1}{i}$ , $n$ ímpar	**
$mK_2$	$Q_m$	$m$	$m$	**
$S_{1,n_1} \cup \dots \cup S_{1,n_j} \cup rK_3$ , $j, n_j, r \geq 0$	$\times$	$3r + \sum_{i=1}^j n_i$	$3r + \sum_{i=1}^j n_i$	**

Tabela B.2: Graus mínimo e máximo de EPEs de algumas classes de grafos

$$* \mathcal{N}(k, q_1, \dots, q_k) = \begin{cases} \sum_{i < j, i \text{ ímpar}, j \text{ par}} q_i q_j + \sum_{i \text{ par}} (i/2) q_i + \sum_{i \text{ ímpar}} \frac{(k-i+1)q_i}{2} + k^2/8 + k/4, & k \text{ par} \\ \sum_{i < j, i \text{ ímpar}, j \text{ par}} q_i q_j + \sum_{i \text{ par}} (i/2) q_i + \sum_{i \text{ ímpar}} (1 + \frac{k-i}{2}) q_i + (k-1)^2/8 + (3/4)(k-1), & k \text{ ímpar} \end{cases}$$

\*\* Contribuições desta tese.

Finalmente, a Tabela B.3 apresenta os graus mínimo e máximo dos EPEs dos grafos conexos que possuem de 2 a 5 vértices. Os grafos  $G$  desta tabela estão de acordo com a numeração dada nas figuras subsequentes B.2 e B.3.

Grafo $G$	$\delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)))$	$\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)))$	Grafo $G$	$\delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)))$	$\Delta(\mathcal{G}(\mathcal{M}(G)))$
1	1	1	16	7	11
2	3	3	17	7	12
3	2	2	18	6	10
4	6	8	19	6	9
5	5	7	20	6	8
6	4	5	21	6	9
7	4	5	22	6	9
8	3	3	23	5	7
9	3	4	24	5	8
10	10	20	25	5	7
11	9	17	26	5	7
12	8	14	27	5	7
13	8	14	28	4	4
14	7	11	29	4	6
15	7	13	30	4	5

Tabela B.3: Graus mínimo e máximo dos grafos conexos que possuem de 2 a 5 vértices

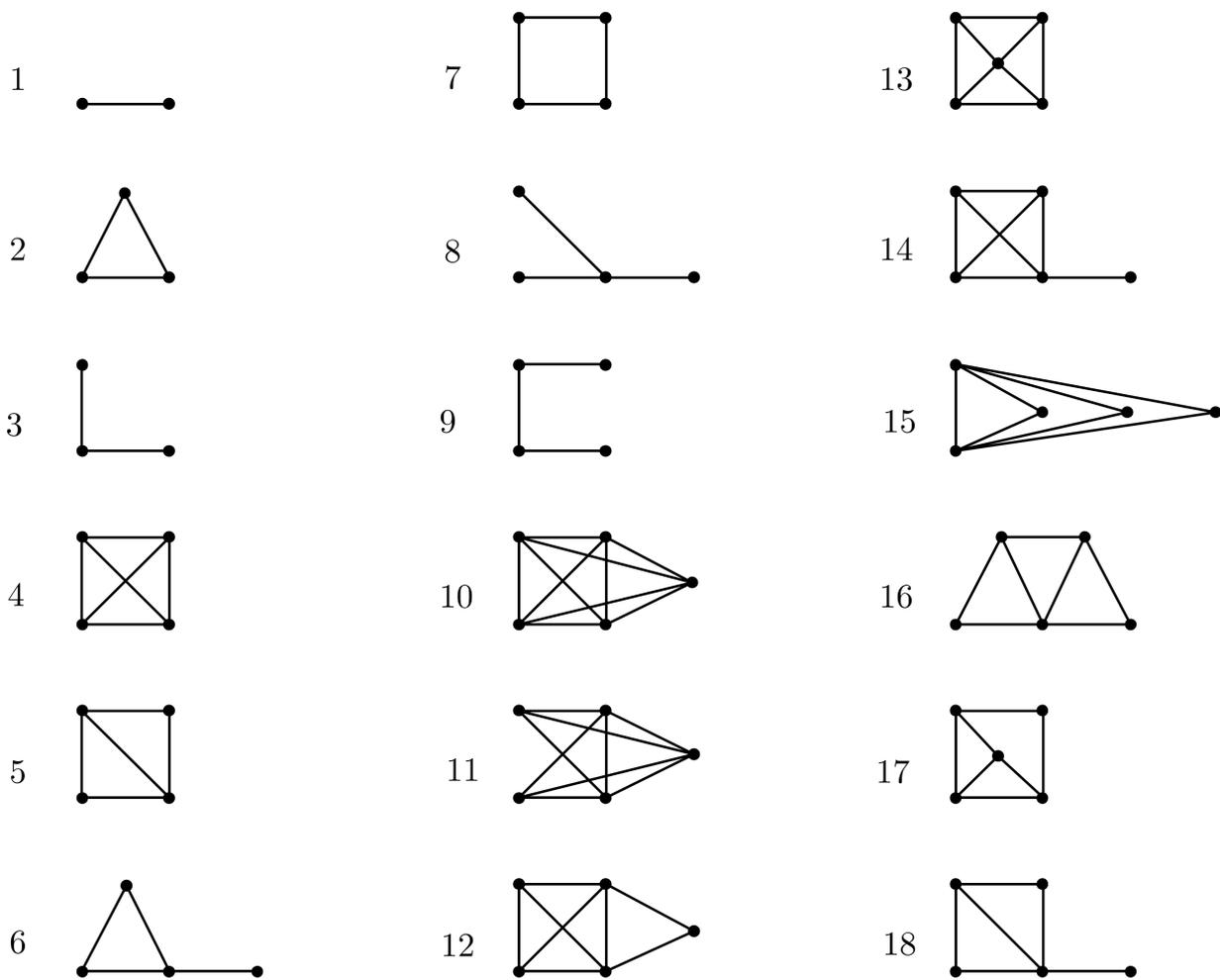


Figura B.2: Grafos 1, 2, ..., 18

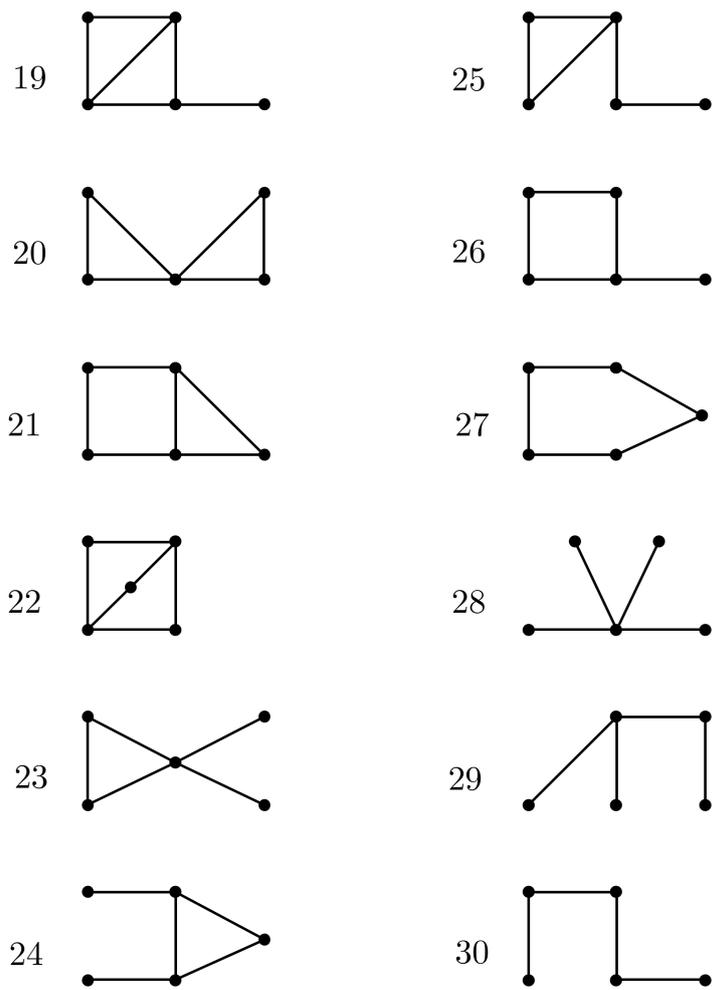


Figura B.3: Grafos 19,20,...,30

# Referências Bibliográficas

- [1] GRUNBAUM, B. *Convex Polytopes*. 2 ed. New York, Springer-Verlag, 2003.
- [2] SCHRIJVER, A. “Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency”. In: *Algorithms and Combinatorics, No. 24*, v. A, Springer-Verlag, 2003.
- [3] ZIEGLER, G. M. *Lectures on Polytopes*. Berlin, Springer, 1995.
- [4] BRUALDI, R. A., RYSER, H. J. “Combinatorial Matrix Theory”. In: *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, v. 39, Cambridge University Press, 1991.
- [5] COSTA, L., DA FONSECA, C. M., MARTINS, E. A. “The Diameter of the Acyclic Birkhoff Polytope”, *Linear Algebra Appl.*, v. 428, pp. 1524–1537, 2008.
- [6] ABREU, N., COSTA, L., DAHL, G., et al. “The Skeleton of Acyclic Birkhoff Polytopes”, *Linear Algebra Appl.*, v. 457, pp. 29–48, 2014.
- [7] FERNANDES, R. “Computing the Degree of a Vertex in the Skeleton of Acyclic Birkhoff Polytopes”, *Linear Algebra Appl.*, v. 475, pp. 119–133, 2015.
- [8] BIAN, H., ZHANG, F. “The Graph of Perfect Matching Polytope and an Extreme Problem”, *Discrete Math.*, v. 309, pp. 5017–5023, 2009.
- [9] PADBERG, M. W., RAO, M. R. “The Travelling Salesman Problem and a Class of Polyhedra of Diameter Two”, *Mathematical Programming*, , n. 7, pp. 32–45, 1974.
- [10] WANG, X., YUAN, J., LIN, Y. “A Characterization of PM-compact Hamiltonian Bipartite Graphs”, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, v. 31(2), pp. 313–324, 2015.
- [11] WANG, S., YUAN, J., LIU, Y., et al. “On the Maximum Matching Graph of a Graph”, *OR Transactions*, v. 2, n. 2, 1998.
- [12] EROH, L., SCHULTZ, M. “Matching Graphs”, *Journal of Graph Theory*, v. 2, pp. 73–86, 1998.

- [13] JONES, D. M., ROEHM, D. J., SCHULTZ, M. “On Matchings in Graphs”, *Ars Combin.*, , n. 50, pp. 65–79, 1998.
- [14] LIU, Y., LIN, Y., HUANG, Y., et al. “The Girth of the Maximum Matching Graph”, *OR Transactions*, , n. 5, pp. 13–20, 2001.
- [15] LIU, Y. “Subgraphs of Maximum Matching Graphs”, *Indian J. pure appl. Math.*, v. 35, n. 9, pp. 1063–1067, 2004.
- [16] LIU, Y. “Characterizations of Maximum Matching Graphs of Certain Types”, *Discrete Math.*, v. 290, pp. 283–289, 2005.
- [17] LIU, Y., LIU, Z. “Second kind maximum matching graph”, *Discrete Math.*, v. 323, pp. 27–34, 2014.
- [18] NETTO, P. O. B. *Grafos: Teorias, Modelos, Algoritmos*. 2 ed. Rio de Janeiro, Blucher, 2006.
- [19] DIESTEL, R. *Graph Theory*. 2 ed. New York, Springer-Verlag, 2000.
- [20] MERRIS, R. “Graph Theory”. Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley-Interscience, 2001.
- [21] BOLLOBÁS, B. *Modern Graph Theory, GTM*. 1 ed. New York, Springer-Verlag, 1998.
- [22] HARARY, F. *Graph Theory*. Reading, Mass, Addison Wesley Publishing Company, 1969.
- [23] WHITNEY, H. “Congruent graphs and the connectivity of graphs”, *Amer. J. Math.*, v. 54, pp. 150–168, 1932.
- [24] BRUALDI, R. A. “Combinatorial Matrix Classes”. In: *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, v. 108, Cambridge University Press, 2006.
- [25] DAHL, G. “Tridiagonal Doubly Stochastic Matrices”, *Linear Algebra Appl.*, v. 390, pp. 197–208, 2004.
- [26] BALINSKI, M. L. “On the graph structure of convex polyhedra in n-space”, *Pacific J. Math.*, v. 11, pp. 431–434, 1961.
- [27] GRUNBAUM, B. “On the facial structure of convex polytopes”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 71, pp. 559–560, 1965.
- [28] SCHRIJVER, A. “Short Proofs on the Matching Polyhedron”, *Journal of Combinatorial Theory*, v. B 34, pp. 104–108, 1983.

- [29] SCHRIJVER, A. *Theory of Linear and Integer Programming*. 2 ed. Chichester, Wiley-Interscience, 1986.
- [30] LOVASZ, L., PLUMER, M. D. “Matching Theory”. In: *Mathematics Studies*, v. 121, *Ann. Discrete Math.* 29, North-Holland, 1986.
- [31] CHVÁTAL, V. “On Certain Polytopes Associated with Graphs”, *Journal of Combinatorial Theory*, v. B 18, pp. 138–154, 1975.
- [32] EDMONDS, J. “Maximum matching and a polyhedron with 0,1-vertices”, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, v. 69B, n. 1, 2, pp. 125–130, 1965.
- [33] COSTA, L., DA FONSECA, C. M., MARTINS, E. A. “Face Counting on an Acyclic Birkhoff Polytope”, *Linear Algebra Appl.*, v. 430, pp. 1216–1235, 2009.
- [34] COSTA, L., MARTINS, E. A. “Faces of Faces of the Acyclic Birkhoff Polytope”, *Journal of Mathematical Sciences*, v. 182, pp. 144–158, 2012.
- [35] JOJIC, D. “Some remarks about acyclic and tridiagonal Birkhoff polytopes”, *Linear Algebra Appl.*, v. 495, pp. 108–121, 2016.
- [36] COSTA, L., MOHAMMADIAN, A. “The Skeleton of the Matching Polytope of a Tree”, *preprint*.
- [37] NIKIFOROV, V. “The maximum spectral radius of  $C_4$ -free graphs of given order and size”, *Linear Algebra Appl.*, v. 430, pp. 2898–2905, 2009.
- [38] RAHMAWATI, S., SUGENG, K. A., SILABAN, D. R. “Construction of New Larger (a,d)-edge Antimagic Vertex Graphs by using Adjacency Matrices”, *Australian Journal of Combinatorics*, v. 56, pp. 257–272, 2013.
- [39] ABREU, N., COSTA, L., NASCIMENTO, C., et al. “Sobre vértices do esqueleto do politopo de emparelhamentos de um grafo”, *In Anais do XLVIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Vitória - ES*, pp. 3176–3185, 2016.
- [40] NADDEF, D. J., PULLEYBLANK, W. R. “Hamiltonicity in (0,1)-Polyhedra”, *J. of Combin. Theory Ser. B*, v. 37, pp. 41–52, 1984.
- [41] STEVANOVIC, D. *NewGraph system*. <http://www.mi.sanu.ac.rs/newgraph/> (Acessado em 01/12/2016).

# Índice Remissivo

- $I(e)$ , 6
- $N(u)$ , 5
- $\mathcal{H}_G$ , 75
- $n$ -cubo, 7
- árvore, 6
  
- caminho, 6
  - $M$ -bom, 20, 40
  - alternado, 9
- caterpillar, 6
- ciclo, 6
  - $M$ -bom, 40
  - alternado, 9
  
- diâmetro
  - de um grafo, 7
  - de um politopo, 18
- diferença simétrica, 17
- dimensão
  - de  $\mathcal{M}(G)$ , 14
  - de um conjunto, 11
- distância, 7
  
- elo, 44
- emparelhamento, 9
  - máximo, 9
  - maximal, 9
  - número de, 9
  - perfeito, 9
  - quase perfeito, 9
  - sem vizinhos comuns, 42
  - unitário, 9
- EPE, 26
  
- EpemGraph, 82
- esqueleto
  - $m$ -regular, 47
  - de um politopo, 13
  - dos emparelhamentos unitários, 75
- estrela, 6
  
- face, 11
  - de dimensão 0, 11
  - de dimensão 1, 11
- fecho convexo, 10
  
- grafo, 5
  - $B_p$ , 37
  - $P_n^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ , 32
  - $P_{n,t}^i$ , 30
  - $S_n^k$ , 34
  - $\mathcal{H}_G$ , 75
  - $d$ -politopal, 13
  - $k$ -partido, 7
  - $n$ -cubo, 7
  - acíclico, 6
  - bipartido, 7
  - completo, 7
  - conexo, 6
  - euleriano, 7
  - hamiltoniano, 7
  - linha, 8
  - regular, 7
  - trivial, 5, 6
  - unicíclico, 7
  - vazio, 5

grafos

- homeomorfos, 7
- isomorfos, 8
- união de, 8

grau, 5

- de um emparelhamento, 15
- de um emparelhamento em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ , 42, 53
- de um emparelhamento em  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_n))$ , 55
- de um emparelhamento em  $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$ , 21, 22
- de um emparelhamento perfeito de  $C_n$ , 60
- de um emparelhamento sem vizinhos comuns, 43
- de um emparelhamento unitário, 45
- do emparelhamento  $\emptyset$ , 40

grau máximo, 5

- de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_n))$ , 59, 61
- de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_n))$ , 62, 63
- de  $\mathcal{G}(\Omega_n(P_n))$ , 23
- de  $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$ , 23

grau mínimo, 5

- de  $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ , 44
- de  $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$ , 22

homeomorfismo de grafos, 7

inequação linear, 10

isomorfismo de grafos, 8

join, 8

limite

- $\Delta_1$ , 65
- $\Delta_2$ , 68

matriz

- de adjacência, 9
- duplamente estocástica, 11
- tridiagonal, 12

matrizes de permutação, 12

partição

- $M$ -boa, 50
- $\beta_M$ , 49
- bem relacionada, 49

poliedro, 10

polinômio característico, 9

politopo, 10

- $(0, 1)$ -politopo, 11, 72
- acíclico de Birkhoff, 19
- de Birkhoff, 12
- de Birkhoff tridiagonal, 12
- de emparelhamentos, 14
- de emparelhamentos perfeitos, 14

sistema linear, 10

starlike, 24

subdivisão de aresta, 7

subgrafo, 6

- gerador, 6
- induzido, 6

Teorema

- de Kuratowski, 7
- de Whitney, 9

triângulo, 8, 10, 16, 46, 47

vertice

- $M$ -insaturado interno, 21
- dominante, 6
- isolado, 5
- pendente, 5
- quase pendente, 6
- universal, 6

vetor de incidência, 14