

M-SPREAD E SPREAD LAPLACIANO VERSUS NÚMERO CROMÁTICO DE
UM GRAFO

Aroldo José de Oliveira

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Produção.

Orientadores: Nair Maria Maia de Abreu
Leonardo Silva de Lima

Rio de Janeiro
Agosto de 2012

M-SPREAD E SPREAD LAPLACIANO VERSUS NÚMERO CROMÁTICO DE
UM GRAFO

Aroldo José de Oliveira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO.

Examinada por:

Prof^a. Nair Maria Maia de Abreu, D.Sc.

Prof. Leonardo Silva de Lima, D.Sc.

Prof. Nelson Maculan Filho, D.Sc.

Prof^a. Lilian Markenzon, D.Sc.

Prof^a. Maria Aguiéiras Alvarez de Freitas, D.Sc.

Prof^a. Carla Silva Oliveira, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
AGOSTO DE 2012

Oliveira, Aroldo José de

M-Spread e Spread laplaciano versus Número Cromático de um grafo/Aroldo José de Oliveira. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2012.

X, 86 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: Nair Maria Maia de Abreu

Leonardo Silva de Lima

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Produção, 2012.

Referências Bibliográficas: p. 79 – 83.

1. M-Spread e Spread laplaciano.
2. Matrizes de adjacência, laplaciana e laplaciana sem sinal.
3. Problema de Atribuição de Frequências. I. Abreu, Nair Maria Maia de *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Produção. III. Título.

Agradecimentos

À minha esposa Joelma e meus filhos Matheus e Gustavo, pela compreensão, pela paciência e pelo incentivo.

À minha orientadora Nair M. M. de Abreu e meu co-orientador Leonardo S. de Lima, pelo carinho e dedicação durante todo o tempo de orientação.

A todos os professores que tive durante o curso.

A todos os funcionários do PEP, destacando Andréia Lima da Silva Moreira, secretária da PO.

Aos meus colegas de curso Joelma, Laura, Luciana, Leonardo e James.

À Universidade Federal de Mato Grosso, que possibilitou meu afastamento para a realização do doutorado.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

M-SPREAD E SPREAD LAPLACIANO VERSUS NÚMERO CROMÁTICO DE UM GRAFO

Aroldo José de Oliveira

Agosto/2012

Orientadores: Nair Maria Maia de Abreu
Leonardo Silva de Lima

Programa: Engenharia de Produção

Seja G um grafo simples com n vértices e seja M uma matriz simétrica real associada a G . O *spread* de M , denotado por $s(M)$, é dado pela diferença entre o maior e menor autovalores de M . Neste trabalho, provamos que $s(M)$ é no mínimo o número cromático de G , denotado por $\chi(G)$, ou seja, $s(M) \geq \chi(G)$, onde M pode ser a matriz de adjacência $A(G)$, a laplaciana $L(G)$ ou a matriz laplaciana sem sinal $Q(G)$. Como o menor autovalor de $L(G)$ é nulo, o *spread* da matriz laplaciana coincide com o índice desta matriz, que é o seu maior autovalor. Desta forma, definimos por *spread laplaciano* a diferença entre o maior e o segundo menor autovalor de $L(G)$ e o denotamos por $\tilde{s}_L(G)$. Provamos, que para este caso, a desigualdade anterior é válida somente em algumas classes especiais de grafos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

M-SPREAD AND SPREAD LAPLACIAN VERSUS CHROMATIC NUMBER
OF A GRAPH

Aroldo José de Oliveira

August/2012

Advisors: Nair Maria Maia de Abreu
Leonardo Silva de Lima

Department: Production Engineering

Let G be a simple graph on n vertices, let M be a real symmetric matrix associated with G . The spread of M , denoted $s(M)$, is given by the difference between the largest and the smallest eigenvalue of M . In this work, we prove that $s(M)$ is at least the chromatic number, denoted by $\chi(G)$, i.e., $s(M) \geq \chi(G)$, where M can be the adjacency matrix $A(G)$, the Laplacian matrix $L(G)$ or the signless Laplacian matrix $Q(G)$. Since the smallest eigenvalue of $L(G)$ is null, the Laplacian spread is equal to the index of $L(G)$. Thus, we define the Laplacian spread as the difference between the largest and the second smallest eigenvalue of $L(G)$ and denoted by $\tilde{s}_L(G)$. We prove that, in this case, the previous inequality does not hold for every G but just in some special classes of graphs.

Sumário

Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
2 Conceitos Básicos	5
2.1 Álgebra Linear	5
2.2 Teoria de Grafos	11
2.3 Teoria Espectral de Grafos	15
3 Número Cromático e o Problema de Atribuição de Frequências	21
3.1 Coloração de vértices em Grafos	21
3.2 Problema de Atribuição de Frequências	26
4 M-Spread	29
4.1 <i>A-spread</i>	30
4.2 <i>L-spread</i> e o <i>spread laplaciano</i>	40
4.3 <i>Q-spread</i>	41
4.4 <i>M-spreads</i> e o número cromático	45
4.5 Seriam os <i>M-spreads</i> comparáveis?	47
4.6 Problema de Atribuição de Frequências versus os <i>M-spreads</i>	49
5 Spread Laplaciano	51
5.1 Conectividade algébrica	52
5.2 <i>Spread</i> laplaciano	54
5.3 O <i>spread</i> laplaciano de um grafo e o número cromático	59
5.3.1 Classes de grafos com $\tilde{s}_L(G) \leq \chi(G)$	60
5.3.2 Classes de grafos com $\tilde{s}_L(G) \geq \chi(G)$	69
5.4 Conjecturas sobre o <i>spread laplaciano</i>	72
6 Considerações Finais	76
Referências Bibliográficas	79

Lista de Figuras

2.1	Grafos <i>thresholds</i>	14
2.2	Grafos $H_{n,k}$ com $n = 5$ e $k \in \{0, 1, 2\}$	15
2.3	Grafo G	16
2.4	Grafos coespectrais e não isomorfos	18
3.1	Uma 4-coloração própria do grafo G	22
3.2	Grafo G e sua matriz de adjacência $A(G)$	28
4.1	Grafos minimais com $s_A(G) > 4$	33
4.2	Subgrafos induzidos próprios de K_5 com $s_A(G) \leq 4$	33
4.3	Grafos para os quais os subgrafos induzidos tem $s_A(G) \leq 4$	34
4.4	Subgrafos conexos induzidos de H_2	34
4.5	O ciclo C_4 tem $s_A(C_4) = 4$ e seu complementar $2K_2$ é desconexo.	35
4.6	Todos os grafos $G(n, k)$ com $n=4$ e $s_A(G) > 4$	36
4.7	Todos os grafos $G(n, k)$ com $n=5$ e $s_A(G) > 5$	36
4.8	$K_4 \vee \bar{K}_2$ tem o spread máximo dentre os grafos conexos com $n = 6$ vértices.	36
4.9	Grafo livre de K_4	37
4.10	S_n^3 é o grafo de cintura 3 que atende a Proposição 4.17	38
4.11	Grafo unicíclico S_n^3	44
4.12	Grafo W_1	48
4.13	Grafo W_2	48
5.1	Estrela dupla $T(n, p)$	54
5.2	Árvore T e seu grafo linha T^L	55
5.3	Grafo unicíclico que maximiza o <i>spread laplaciano</i>	55
5.4	Grafos bicíclicos que maximizam o <i>spread laplaciano</i>	56
5.5	Grafos tricíclicos que maximizam o <i>spread laplaciano</i>	57
5.6	Grafo G e dois subgrafos H e W	58
5.7	Grafos $SC(6, k)$ para os quais $\chi(SC(6, k)) > \tilde{s}_L(SC(6, k))$	68
5.8	Grafos G_c para $n = 6$ e $n = 7$	71

5.9	Únicos grafos com até 6 vértices, grau mínimo 2 e conectividade al- gébrica inferior a 1.	74
5.10	Grafo extremal com $n = 9$ vértices.	75

Capítulo 1

Introdução

Embora a Teoria Espectral de Grafos (TEG) tenha como marco inicial o trabalho desenvolvido por *Hückel*, na área de Química Quântica, em 1931, sua fundamentação teórica teve início somente em 1957 com o artigo de *Collatz et al* [15], consolidando-se com a tese de doutorado de *Cvetković*, em 1971. Uma das grandes motivações investigadas pelos pesquisadores na época era a tentativa de provar que "qualquer grafo poderia ser caracterizado a partir do seu espectro". Apesar da afirmação anterior não ser verdadeira, a busca pela afirmativa ou negativa desta intensificou o interesse pelo tema, estimulando o desenvolvimento da área. Para uma boa informação sobre a Teoria Espectral de Grafos, consulte a página, <http://www.sgt.pep.ufrj.br>, onde podem ser encontrados mais de duas mil referências neste tema.

Os trabalhos na área de TEG visam analisar propriedades estruturais de grafos e determinar as propriedades espectrais de matrizes a eles associadas. Existem diversas matrizes relacionadas a um grafo e as mais investigadas são as de adjacência e a laplaciana, ver por exemplo [20] e [51]. Nos últimos anos, tem crescido o interesse pelo estudo da matriz laplaciana sem sinal, pois experimentos computacionais parecem indicar que o espectro da matriz laplaciana sem sinal fornece mais informações sobre a estrutura do grafo que os espectros das matrizes de adjacência e laplaciana.

Do que foi dito acima, podemos concluir que a Teoria Espectral de Grafos estuda os grafos por intermédio de uma matriz M , quando M representa um grafo. Para maiores detalhes consulte [17] e [23].

Um invariante de um grafo é um valor numérico a ele relacionado que é preservado via isomorfismo, ou seja, grafos isomorfos possuem os mesmos invariantes. Há um número vasto de invariantes espectrais decorrentes dos espectros das M -matrizes. Dentre eles, destacamos o *índice*, que é o maior autovalor de M , a *conectividade algébrica*, que é o segundo menor autovalor da matriz laplaciana, o *spread* que é dado pela diferença entre o maior e o menor autovalores de M e o *spread laplaciano*, dado pela diferença entre o maior e o segundo menor autovalores da matriz laplaciana. Naturalmente, há inúmeros outros invariantes relacionados a grafos que não são de natureza espectral. Por exemplo, o *número cromático*, dado pelo menor número de cores atribuídas aos vértices do grafo de modo que vértices adjacentes recebam cores distintas. É natural que haja uma série de resultados que relacionem invariantes não-espectrais com os espectrais e que uma série de questões em relação aos dois tipos de invariantes sejam levantadas pelos pesquisadores. Por exemplo, existe alguma relação entre o número cromático de um grafo e seu *spread*? Esta é uma das questões que investigamos nesta tese de doutorado e um dos motivos que nos conduziu a isto é que, como se sabe, a determinação do número cromático é um problema NP-difícil e de grande interesse em problemas de Otimização Combinatória, [31]. Assim, qualquer informação que obtemos a respeito desse invariante poderá nos ajudar em investigações futuras.

O Problema de Atribuição de Frequências (PAF), também é um problema NP-difícil, além de ser um objeto de interesse teórico, trata-se também de um problema prático com aplicações a rádio e telefonia, mais especificamente, a telefonia móvel. O PAF é visto como uma generalização do problema de coloração em grafos (em geral, em grafos valorados), em que os transmissores são representados pelos vértices do grafos e a inter-relação entre dois transmissores, pelas arestas. Um dos objetivos estudados no PAF é a determinação de faixas de comprimento mínimo para o espectro de frequências $[f_{min}, f_{max}]$ a serem utilizadas. A largura de tal faixa é conhecida por *span*. Em outras palavras, o que se quer é determinar o *span* mínimo de modo que as frequências das ondas de rádio sejam atribuídas sem causar ruídos. No caso de

grafos não valorados, o *span* pode ser expresso em termos do seu número cromático.

Um dos principais objetivos da tese é comparar os *M-spreads* de um grafo com o número cromático do mesmo. Nesta tese, provamos ser o *spread* limitado inferiormente pelo número cromático, tanto para a matriz de adjacência, $A(G)$, quanto para laplaciana, $L(G)$. Em 2011, *Lima et al* [47] provaram que este resultado também vale para a matriz laplaciana sem sinal, $Q(G)$. Assim, dado que a desigualdade

$$\chi(G) \leq M\text{-spread}, \quad (1.1)$$

é válida para $M = A(G)$, $L(G)$ ou $Q(G)$, investigar qual dos *M-spreads* dá um melhor limite para o número cromático passa a ser uma questão interessante. Isto será também discutido nesta tese. A desigualdade (1.1) nos possibilita relacionar o *span* mínimo com os *M-spreads*. Investigar relações entre o *spread laplaciano* de um grafo e seu número cromático é outro de nossos propósitos. Para este caso, vimos que a desigualdade (1.1) não é válida para todos os grafos. Pretendemos então identificar classes de grafos em que o número cromático é limitado superiormente pelo *spread laplaciano*. A identificação de classes onde a desigualdade (1.1) vale no sentido contrário também será objeto de nossas pesquisas.

O trabalho se desenvolve da seguinte forma: No Capítulo 2, apresentamos os pré-requisitos básicos de Álgebra Linear, de Teoria de Grafos e de Teoria Espectral de Grafos necessários à compreensão do texto. O Capítulo 3 está dividido em duas partes: na primeira, apresentamos alguns resultados da literatura relacionados ao número cromático de um grafo para, em seguida, definirmos e apresentarmos o Problema de Alocação de Frequências. No Capítulo 4, descrevemos alguns resultados já conhecidos referentes aos maiores e menores autovalores das *M-teorias*. Depois disto, apresentamos os principais resultados já conhecidos referentes aos *M-spreads*. Em seguida, apresentamos as nossas contribuições relacionadas a este tema. Dentre elas destacamos a prova de que o número cromático é limitado superiormente pelos *M-spreads* e a impossibilidade de se estabelecer, no caso geral, uma ordenação entre eles, embora tenhamos obtido uma ordenação deles nas classes de grafos bipartidos

e k -regulares. Ainda neste capítulo, relacionamos os M -spreads com o $span$ de um grafo não valorado. O Capítulo 5 é dedicado aos resultados referentes ao $spread$ laplaciano de um grafo. Inicialmente, verificamos que, para todos os grafos, o número cromático não é limitado nem superior e nem inferiormente pelo $spread$ laplaciano, mas mostramos que em determinadas classes de grafos, o $spread$ laplaciano pode ser um limitante superior para o número cromático e também exibimos algumas classes em que vale o contrário. Finalizamos a tese tecendo algumas considerações com destaque para alguns problemas em aberto.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados da Álgebra Linear, da Teoria de Grafos e da Teoria Espectral de Grafos necessários à compreensão do texto. As principais referências bibliográficas consultadas foram [7],[18],[20],[43],[46],[50] e [54].

2.1 Álgebra Linear

Considere $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem n como um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{R} dos números reais. Seja $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dizemos que λ é um *autovalor* de M , se existe um vetor não nulo $u \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$Mu = \lambda u. \tag{2.1}$$

O vetor u não nulo é chamado *autovetor* de M associado ao autovalor λ . Podemos reescrever a equação (2.1) da seguinte forma,

$$(\lambda I_n - M)u = 0. \tag{2.2}$$

Desde que u seja um vetor não nulo, a equação (2.2) acarreta que λ é um autovalor de M se e somente se $\lambda I_n - M$ é uma matriz singular. Equivalentemente, podemos dizer que λ é um autovalor de M se e somente se $\det(\lambda I_n - M) = 0$. Assim, os autovalores de M são as raízes do polinômio $p_M(\lambda) = \det(\lambda I_n - M)$, denomi-

nado *polinômio característico* de M . O *espectro da matriz* M é constituído pelo conjunto das n raízes com as suas respectivas multiplicidades. Sabe-se que zero é um autovalor de M se e somente se $\det M = 0$, ou seja, se M é uma matriz singular. A *multiplicidade algébrica* de λ é a multiplicidade deste como raiz do polinômio característico $p_M(\lambda)$. O auto-espaço de M associado a λ é definido por

$$V_\lambda(M) = \{u \in \mathbb{R}^n : (\lambda I_n - M)u = 0\}.$$

A dimensão do auto-espaço $V_\lambda(M)$ é denominada *multiplicidade geométrica* de λ .

A matriz *transposta* de $M = [m_{ij}]$ é a matriz $M^T = [\tilde{m}_{ij}]$ tal que $\tilde{m}_{ij} = m_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$. Se $M^T = M$, diz-se que M é uma matriz *simétrica*.

A maioria dos conceitos e provas dos resultados dispostos nesta seção podem ser encontrados em [46], [43] e [32].

Teorema 2.1 [32] *Se M é uma matriz simétrica de ordem n então seus autovalores são números reais.*

A matriz M é *invertível* se existe uma matriz B tal que $MB = BM = I$, onde I é a matriz *identidade* de ordem n . Neste caso, diz-se que B é a inversa de M e denota-se $B = M^{-1}$.

Dado um conjunto de vetores $\beta = \{v_1, \dots, v_m\}$ de \mathbb{R}^n , diz-se que o vetor v é *combinação linear* dos elementos de β se existir escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m.$$

Diz-se que v_1, \dots, v_m são *linearmente independentes* quando

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0, \forall i, i \in \{1, \dots, m\}. \quad (2.3)$$

Caso contrário, ou seja, quando para a equação (2.3) existe $\alpha_i \neq 0$, para algum $1 \leq i \leq m$, dizemos que os vetores são *linearmente dependentes*. Quando temos autovetores associados a autovalores distintos, estes são linearmente independentes.

Sejam $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ e $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ vetores do \mathbb{R}^n , então:

1. O produto escalar de u por v é dado por $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n (u_i v_i) = u^T v$;
2. A norma euclidiana do vetor u é definida por $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$;
3. Se $\|u\| = 1$, diz-se que u é um *vetor unitário*.

Um conjunto $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ de vetores em \mathbb{R}^n é uma base de \mathbb{R}^n , se o conjunto S é linearmente independente. Uma base S é *ortogonal* se quaisquer dois vetores distintos de S são ortogonais, isto é, $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ para $i \neq j$. Se todos os vetores de uma base ortogonal S são unitários, diz-se que S é uma base ortonormal. Uma matriz de ordem n é ortogonal se e somente se suas linhas (ou colunas) formam uma base ortonormal de vetores em \mathbb{R}^n .

Teorema 2.2 [32] *Seja M uma matriz simétrica de ordem n . Então autovetores associados a autovalores distintos de M são ortogonais.*

De agora em diante vamos denotar por $S_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes quadradas reais e de ordem n que são simétricas. Duas matrizes M_1 e M_2 quadradas e de mesma ordem são semelhantes, se existir uma matriz invertível P tal que $M_2 = P^{-1}M_1P$. Se M_2 é semelhante a M_1 , então escrevemos $M_2 \sim M_1$. O traço de M , $tr(M)$, corresponde à soma dos elementos da diagonal principal de M . Matrizes semelhantes possuem o mesmo traço. Uma matriz M é dita ser diagonalizável quando ela é semelhante a uma matriz diagonal.

Teorema 2.3 [32] *Se $M \in S_n(\mathbb{R})$, então M é diagonalizável. Além disso, existe uma matriz ortogonal Q tal que $Q^{-1}MQ = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de M .*

O conjunto constituído pelas colunas da matriz ortogonal Q , dada no Teorema 2.3, forma uma base ortogonal de \mathbb{R}^n , constituída por autovetores de M .

Lema 2.4 [32] *Seja $M \in S_n(\mathbb{R})$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os autovalores de M e $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal de autovetores de M . A decomposição espectral de M é*

$$M = \lambda_1 v_1 v_1^t + \dots + \lambda_n v_n v_n^t.$$

Uma matriz simétrica M de ordem n é semidefinida positiva se $x^T M x \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Isto é equivalente a dizer que todos os seus autovalores são maiores ou iguais a zero.

Sejam $M = [m_{ij}]$ uma matriz de ordem n e ρ uma permutação em $\{1, 2, \dots, n\}$. Denotamos por M_ρ a matriz $[m'_{ij}]$ tal que $m'_{ij} = m_{\rho(i)\rho(j)}$. Dizemos que uma matriz M é irredutível se não existe uma permutação ρ sobre as linhas e colunas de M tal que se possa obter de M , a matriz

$$M_\rho = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

com B e D matrizes quadradas. Caso contrário, diz-se que M é redutível.

Uma matriz M real é denominada não negativa se suas entradas são números reais não negativos. Denotamos uma matriz real não negativa por $M \geq 0$.

O teorema que segue é um dos mais utilizados em Teoria Espectral de Grafos e é conhecido como Teorema de Perron-Frobenius.

Teorema 2.5 [43] *Seja M uma matriz de ordem $n \geq 2$, simétrica, não-negativa e irredutível, cujos autovalores são $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Então*

1. $\lambda_1 > 0$ e existe um autovetor positivo associado a este autovalor;
2. $\lambda_1 > \lambda_2$;
3. $|\lambda_i| \leq \lambda_1$ para todo $i = \{1, \dots, n\}$;
4. $\lambda_1 = -\lambda_n$, se e somente se, existe uma permutação ρ tal que

$$M_\rho = \begin{pmatrix} 0 & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}.$$

O autovalor máximo obtido no Teorema 2.5 é denominado *raio espectral* e denotado por $\rho(M)$.

Finalizamos esta seção apresentando dois resultados que serão muito utilizados no Capítulo 5. O primeiro deles pode ser encontrado em [22] e aborda um método de redução de uma matriz particionada em blocos. Uma matriz M é particionada em blocos quando as submatrizes que constituem cada bloco são formadas por linhas e colunas consecutivas de M . Para usar este método, é necessário que, em cada bloco, a soma das linhas sejam constantes e iguais.

Seja M uma matriz particionada em k blocos, ou seja,

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1k} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{k1} & M_{k2} & \cdots & M_{kk} \end{bmatrix}, \text{ onde para cada matriz } M_{i,j}, 1 \leq i, j \leq k, \text{ as}$$

somas das linhas são constantes e iguais a $\bar{m}_{i,j}$. Considere a matriz $\bar{M} = [\bar{m}_{i,j}]_{k \times k}$. Por este método, segue que os autovalores da matriz \bar{M} são também autovalores da matriz original M com mesma multiplicidade. O exemplo a seguir ilustra o método.

$$\text{Seja } M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Observe que a matriz } M \text{ pode ser par-}$$

ticionada da seguinte forma:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}, \text{ onde } M_{11} = (2); \quad M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_{13} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad M_{22} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad M_{23} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$M_{31} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}; M_{32} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } M_{33} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Note que em cada bloco, a soma dos elementos em cada linha é constante. Considere a matriz \overline{M} , formada pelos valores das somas dos elementos da linha em cada bloco, isto é,

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Os polinômios característicos das matrizes M e \overline{M} são dados respectivamente por: $p_M(x) = x(x-2)(x-4)(x-5)^2$ e $p_{\overline{M}}(x) = x(x-2)(x-5)$. Por simples observação, vemos que $p_{\overline{M}}(x)$ divide o polinômio $p_M(x)$.

Uma *submatriz* de M é dela obtida, eliminando-se algumas linhas ou colunas. Quando as linhas e colunas eliminadas são de mesma posição, obtemos uma submatriz principal. O próximo resultado afirma que os autovalores de uma matriz simétrica e os autovalores de sua submatriz principal se entrelaçam.

Teorema 2.6 [43] *Seja $A \in S_n(\mathbb{R})$ e B_{n-1} uma submatriz principal de A obtida pela retirada da linha i e da coluna i de A . Então, os autovalores de A e B se entrelaçam, ou seja, para todo $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $\lambda_j(A) \geq \lambda_j(B) \geq \lambda_{j+1}(A)$.*

Exemplo 2.7 *Considere a matriz A a seguir:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seja B a submatriz principal de A obtida pela retirada da segunda linha e da segunda coluna de A . Assim temos,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De acordo com a Teorema 2.6, $\lambda_1(A) \geq \lambda_1(B) \geq \lambda_2(A) \geq \lambda_2(B) \geq \lambda_3(A) \geq \lambda_3(B) \geq \lambda_4(A)$. De fato, $\lambda_1(A) = 2, 17$; $\lambda_1(B) = 1, 41$; $\lambda_2(A) = 0, 31$; $\lambda_2(B) = 0$; $\lambda_3(A) = -1$; $\lambda_3(B) = -1, 41$ e $\lambda_4(A) = -1, 48$.

2.2 Teoria de Grafos

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples (sem laços e sem arestas múltiplas) e não-orientado, onde V representa o conjunto de seus vértices e E , o conjunto de suas arestas. O *número de vértices* de um grafo é sua ordem, $|V| = n$, e o *número de arestas* é seu tamanho, $|E| = m$, onde $0 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Dois vértices x e y são *adjacentes* quando existe uma aresta $e = \{x, y\} \in E$ entre eles. Duas arestas são *adjacentes* ou *incidentes* se possuem um vértice em comum. Se todos os vértices de um grafo G são dois a dois adjacentes, G é chamado de grafo *completo* de ordem n e denotado por K_n . Um vértice é *universal*, se ele é adjacente a todos os outros. O grafo *complementar* de G , denotado por \overline{G} , é aquele com o mesmo conjunto de vértices de G , sendo que dois vértices distintos são adjacentes em \overline{G} se e somente se eles não são adjacentes em G .

Seja v_i um vértice de G , o *grau* de v_i em G , $d_i = d(v_i)$, é o número de vértices adjacentes a v_i em G . O *grau máximo* de G é $\Delta(G) = \max_{1 \leq i \leq n} (d_i)$ e o *grau mínimo* é $\delta(G) = \min_{1 \leq i \leq n} (d_i)$. A soma dos graus é igual ao dobro do número de arestas. Então o *grau médio* de G , dado pela média dos graus é $\overline{d}(G) = \frac{2m}{n}$. Se $d(v) = 0$, v é um *vértice isolado*. Denominamos *grafo trivial* aquele representado por um único vértice, ou seja, $|V| = 1$, e $|E| = 0$ e, por *grafo nulo*, aquele que tem n vértices isolados, ou seja, $|V| = n$ e $|E| = 0$.

Sejam os grafos $G = (V, E)$ e $G_1 = (V_1, E_1)$. Dizemos que G e G_1 são *isomorfos* se existe uma bijeção $\phi : V \rightarrow V_1$ tal que $\{x, y\} \in E \Leftrightarrow \{\phi(x), \phi(y)\} \in E_1$. Neste caso, denotamos por $G \cong G_1$. É fácil ver que se G é o grafo nulo de ordem n , G é isomorfo a $\overline{K_n}$.

Seja $G_1 = (V_1, E_1)$ um grafo. Se $V_1 \subseteq V$ e $E_1 \subseteq E$, então G_1 é um *subgrafo* de G . Além disso, se G_1 contém todas as arestas $\{x, y\} \in E$, com $x, y \in V_1$, então G_1 é um

subgrafo induzido de G e o denotamos por $G_1 = G\langle V(G_1) \rangle$. Um *grafo gerador* de G é um subgrafo G_1 em que $V = V_1$. Dizemos que um subgrafo G_1 de G é *maximal* com respeito a uma dada propriedade P , quando G_1 satisfaz P e qualquer outro subgrafo H de G que contenha propriamente G_1 não satisfaz P . Se H é um subgrafo completo maximal de G , H é chamado de *clique* de G . Um grafo G é minimal com respeito a uma dada propriedade P , se ele satisfaz a propriedade P e nenhum de seus subgrafos próprios induzidos atendem a esta propriedade. Um conjunto $V_1 \subseteq V$ é chamado independente se todos os seus vértices não forem adjacentes entre si. O número de *independência* de G , denotado por $\alpha(G)$, é a maior cardinalidade dentre todas as cardinalidades dos conjuntos independentes de G .

Sejam os grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$. A *soma direta* dos grafos G_1 e G_2 , é o grafo $G = (V, E)$, denotado por $G_1 + G_2$, para o qual, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V = V_1 \cup V_2$ e $E = E_1 \cup E_2$. O *join* de G_1 e G_2 , denotado por $G_1 \vee G_2$, é o grafo obtido de $G_1 + G_2$, ligando cada vértice de G_1 a todos os outros vértices de G_2 .

Um sequência finita v_1, v_2, \dots, v_k de vértices de um grafo é denominada *cadeia* de v_1 a v_k quando $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$, $\forall 1 \leq i \leq k - 1$, se os vértices forem todos distintos, a cadeia é denominada caminho simples. Quando o grafo G for, ele próprio, um caminho simples, denotamos G por P_k . Se $P_k = v_1 \dots v_k$ é um caminho simples e $k \geq 3$, então o grafo $P_k + v_k v_1$ é chamado ciclo. Se o grafo G for o próprio ciclo, G é denotado por C_k . A *cintura de um grafo* é o comprimento do menor ciclo de um grafo.

O grafo G é *conexo* quando existe um caminho ligando quaisquer dois vértices distintos de G ; caso contrário G é dito *desconexo*. Uma *componente conexa* de G é um subgrafo induzido maximal e conexo de G . Existem grafos que se tornam desconexos pela remoção de um único vértice ou de uma única aresta. Seja v um vértice e e uma aresta de um grafo G . Se $G - v$ tem mais componentes que G , então v é chamado um *vértice de articulação* ou *vértice de corte* de G . Enquanto que se $G - e$ tem mais componentes que G , e é uma *ponte* de G . Em particular, se v é um vértice de articulação ou e é uma ponte de um grafo conexo G , tanto $G - v$ quanto

$G - e$ são grafos desconexos. Para todo grafo conexo não trivial, existem pelo menos dois vértices que não são vértices de cortes.

Uma *árvore* é um grafo conexo e acíclico e *florestas* são grafos cujas componentes conexas são árvores. Deste modo, uma árvore possui pelo menos dois vértices que não são vértices de cortes. Tais vértices são as folhas da árvore e todos estes tem grau 1, isto é, se v é uma folha, $d(v) = 1$. Além disso, toda aresta de uma árvore é uma ponte. Um grafo conexo não trivial que não contém vértices de articulação ou pontes é chamado *grafo não separável*. Podemos assim dizer que os grafos não separáveis possuem um grau de conectividade maior do que os das árvores.

Um corte de vértices de um grafo G é um subconjunto S de vértices de G tal que $G - S$ é desconexo. A cardinalidade de um corte de vértices de cardinalidade mínima é chamado de *conectividade de vértices* e é denotado por $\kappa(G)$ ou simplesmente κ . Um corte de arestas de um grafo G é um subconjunto X de arestas de $E(G)$ tal que $G - X$ é desconexo. A cardinalidade de um corte de arestas de cardinalidade mínima é chamado de *conectividade de arestas* e é denotado por $e(G)$.

Os grafos conexos com n vértices e $m = n$ arestas são chamados unicíclicos. Os grafos conexos com n vértices e $m = n + 1$ arestas são denominados bicíclicos. De forma similar, os grafos conexos com n vértices e $m = n + 2$ arestas são denominados tricíclicos.

O *grafo linha* de um grafo G , denotado por L_G é definido como sendo o grafo onde os vértices correspondem às arestas de G , sendo que dois vértices são adjacentes em L_G se e somente se as arestas correspondentes em G são incidentes.

Um grafo $G(V, E)$ é *k-partido* se o seu conjunto de vértices V pode ser particionado em k subconjuntos não-vazios V_1, V_2, \dots, V_k tal que, $V_i \cap V_j = \emptyset$, $i \neq j$ e $V = V_1 \cup V_2 \dots \cup V_k$. Grafos *2-partidos* são também conhecidos por *bipartidos*. Um grafo *k-partido* tal que quaisquer dois vértices em partições distintas são adjacentes é chamado *k-partido completo* e denotado por K_{n_1, n_2, \dots, n_k} . Um grafo *estrela* com n vértices, denotado por $S_{1, n-1}$, é um grafo bipartido completo, onde uma partição contém exatamente 1 vértice e a outra $n - 1$ vértices.

Um grafo no qual se tenha $d(v) = k$, para todo $v \in V(G)$, é chamado k -regular ou simplesmente regular.

Um grafo $G(V, E)$ é *split* quando é possível particionar o conjunto de vértices em dois conjuntos sendo um deles uma clique de tamanho k e o outro um conjunto independente. Se todos os $n - k$, vértices do conjunto independente estiverem ligados aos k vértices da clique o grafo é chamado de *split completo* e denotado por $SC(n, k)$.

Um grafo $G(V, E)$ é *threshold* se ele pode ser obtido do grafo K_1 por uma sequência qualquer de uma das duas operações:

1. adiciona um vértice isolado;
2. adiciona um vértice universal.

Há várias caracterizações para os grafos *thresholds*. Dentre elas, uma é muito utilizada e envolve grafos proibidos: Um grafo é *threshold* se e somente se ele não possui subgrafo induzido isomorfo a P_4 , C_4 ou $2K_2$, [14].



Figura 2.1: Grafos *thresholds*

Brualdi e Solheid [10] introduziram os grafos $H_{n,k}$ que são grafos conexos com n vértices e $n + k$ arestas, para $0 \leq k \leq n - 3$. Tais grafos são assim construídos: inicialmente rotulamos os vértices de 1 até n e depois ligamos o vértice 1 a cada um dos demais vértices obtendo a estrela S_n de centro em 1. Depois disso, ligamos o vértice 2 aos vértices numerados de 3 até $k + 3$. Na Figura 2.2, exibimos as possibilidades de grafos $H_{5,k}$ para $k = 0, 1$ e 2.

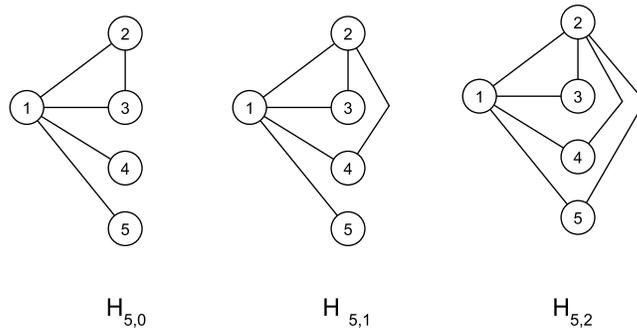


Figura 2.2: Grafos $H_{n,k}$ com $n = 5$ e $k \in \{0, 1, 2\}$.

2.3 Teoria Espectral de Grafos

A *matriz de adjacência* de um grafo G , denotada por $A(G)$, é tal que $a_{ij} = 1$, se o vértice v_i é adjacente ao vértice v_j e $a_{ij} = 0$, em caso contrário. A *matriz laplaciana* de um grafo G é definida por $L(G) = D(G) - A(G)$, onde $D(G)$ é a matriz diagonal dos graus dos vértices de G . Finalmente, a *matriz laplaciana sem sinal* de um grafo G , é dada por $Q(G) = D(G) + A(G)$.

A Teoria Espectral de Grafos estuda os grafos por intermédio dos autovalores de uma matriz M , quando M representa o grafo, ou seja, $M = A(G)$, $L(G)$ ou $Q(G)$.

O polinômio característico de M , $\det(\lambda I - M)$, é denominado *M -polinômio característico* (ou *M -polinômio*) de G e denotado por $M_G(\lambda)$. Os *autovalores* de M e o *espectro* de M (que consiste do conjunto dos n autovalores) são chamados, respectivamente, de *M -autovalores* e *M -espectro* de G . Sendo M simétrica, do Teorema 2.1, seus M -autovalores são números reais. Se M possuir t autovalores distintos, $\alpha_1 > \dots > \alpha_t$, cujas respectivas multiplicidades são $m(\alpha_1), \dots, m(\alpha_t)$, o *espectro de M* é representado por

$$\text{spect}(M) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_t \\ m(\alpha_1) & \dots & m(\alpha_t) \end{bmatrix}.$$

Quando $M = A(G)$ denotamos os autovalores de $A(G)$ por $\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \geq \lambda_n$; quando $M = L(G)$ por $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1} \geq \mu_n$ e quando $M = Q(G)$ por $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_{n-1} \geq q_n$. Alguns autovalores são conhecidos por nomes especiais.

Por exemplo, $\lambda_1(G)$, $\mu_1(G)$ e $q_1(G)$ são os índices das respectivas matrizes $A(G)$, $L(G)$ e $Q(G)$. O autovalor μ_{n-1} é chamado de conectividade algébrica de G .

Enquanto a matriz $A(G)$ possui autovalores reais e pelo menos um deles é negativo, as matrizes $L(G)$ e $Q(G)$ são semidefinidas positivas, ou seja, todos os seus autovalores são positivos. Além disso, $L(G)$ é uma matriz singular, ou seja, 0 é o menor autovalor de seus autovalores.

Exemplo 2.8 *Seja G o grafo dado na Figura 2.3.*

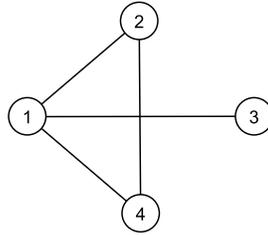


Figura 2.3: Grafo G

Suas matrizes de adjacência $A(G)$ e diagonal $D(G)$ são:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad D(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo, as matrizes laplaciana $L(G)$ e laplaciana sem sinal $Q(G)$ são:

$$L(G) = D - A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad Q(G) = D + A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Seus respectivos polinômios característicos são, $A_G(\lambda) = x^4 - 4x^2 - 2x + 1$, $L_G(\lambda) = x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x$ e $Q_G(\lambda) = x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 16x + 4$, e seus respectivos espectros são,

$$\text{spect}(A(G)) = \begin{bmatrix} 2,17 & 0,31 & -1 & -1,48 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{spect}(L(G)) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} e$$

$$\text{spect}(Q(G)) = \begin{bmatrix} 4,56 & 2 & 1 & 0,44 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, tem-se $\lambda_1 = 2,17$, é o índice de $A(G)$, $\mu_1 = 4$, é o índice de $L(G)$, $q_1 = 4,56$, é o índice de $Q(G)$ e a conectividade algébrica $\mu_{n-1} = 1$.

O resultado que segue relaciona propriedades estruturais dos grafos com o espectro da matriz de adjacência.

Proposição 2.9 [7] *Seja G um grafo com n vértices, m arestas e t triângulos tal que*

$$A_G(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

seja o polinômio característico de G . Então os coeficientes de $A_G(\lambda)$ satisfazem:

(i) $a_1 = 0$;

(ii) $a_2 = -m$;

(iii) $a_3 = -2t$;

(iv) $a_n = (-1)^n \det(A(G))$.

Além disso, temos:

(v) $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$;

(vi) $\text{tr}(A^2) = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 = 2m$;

(vii) $\text{tr}(A^3) = \lambda_1^3 + \dots + \lambda_n^3 = 6t$.

Dizemos que um grafo G é *caracterizado pelo seu espectro*, quando qualquer outro grafo H com o mesmo espectro de G é isomorfo a este. Como já dissemos na introdução, não é sempre possível obter univocamente um grafo a partir do seu espectro, ou seja, podem existir dois grafos não isomorfos com o mesmo espectro. Estes grafos são denominados *coespectrais*. A Figura 2.3, exibe um par de grafos coespectrais. Em verdade, é o par de grafos coespectrais conexos com o menor número de vértices.

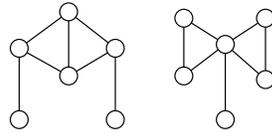


Figura 2.4: Grafos coespectrais e não isomorfos

No artigo [23], é apresentada uma discussão sobre grafos caracterizados pelo espectro e o que se pode dizer até o momento é que há poucas classes de grafos com esta propriedade. No entanto, existem algumas classes de grafos que, apesar de não serem caracterizadas pelo espectro, possuem algumas propriedades espectrais importantes. Por exemplo, na classe dos grafos k -regulares, o índice sempre coincide com o grau k do grafo em questão. Veja a proposição que segue, cuja prova se encontra em *Biggs* [7].

Proposição 2.10 [7] *Seja G um grafo k -regular, então:*

- (i) k é um autovalor de G ;
- (ii) Se G é conexo, a multiplicidade de k é igual a 1;
- (iii) $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = n\lambda_1$;
- (iv) $|\lambda| \leq k$, para todo λ autovalor de G .

Outra importante relação para os grafos regulares é a conexão entre os autovalores do grafo G e de seu complementar \overline{G} .

Proposição 2.11 [3] *Se G um grafo k -regular com autovalores $k, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, os autovalores de \overline{G} são $n - k - 1, -1 - \lambda_2, \dots, -1 - \lambda_n$. Além disso, os autovetores de G associados a λ_i são iguais aos autovetores de \overline{G} associados a $-1 - \lambda_i$.*

Na próxima proposição veremos que podemos obter os autovalores de $L(\overline{G})$ em função dos autovalores de $L(G)$. Neste caso, não é necessário que G seja regular.

Proposição 2.12 [22] *Seja \overline{G} o grafo complementar de G . Para $i = 1, 2, \dots, n - 1$, $\mu_i(\overline{G}) = n - \mu_{n-i}(G)$ e $\mu_n(\overline{G}) = 0$.*

Consideremos agora, a classe dos grafos bipartidos. Em Biggs [7] encontramos a prova de que o espectro de um grafo nesta classe é simétrico em relação à origem.

Proposição 2.13 [7] *Seja G um grafo bipartido. Se λ é um autovalor qualquer de G , então $-\lambda$ também é um autovalor de G .*

O próximo teorema estabelece uma relação entre os autovalores de um grafo e aqueles obtidos do grafo resultante quando do grafo original retiramos um vértice. Este resultado é uma versão para grafos do *Teorema de Entrelaçamento*, reveja o Teorema 2.6, onde a retirada da linha i e da coluna i da matriz, corresponde à retirada do vértice i do grafo.

Teorema 2.14 [43] *Sejam $G = (V, E)$ um grafo com $n > 2$ vértices e H o subgrafo obtido de G pela retirada de um vértice j , $j \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$. Então,*

$$\lambda_j(G) \geq \lambda_j(H) \geq \lambda_{j+1}(G).$$

Finalizamos esta seção apresentando alguns resultados úteis para a obtenção do A -polinômio característico de um grafo G .

Proposição 2.15 [18] *Se $G = G_1 + G_2$, então $A_G(\lambda) = A_{G_1}(\lambda).A_{G_2}(\lambda)$. No caso mais geral, se G_1, G_2, \dots, G_k são as componentes conexas de um grafo G , então $A_G(\lambda) = A_{G_1}(\lambda).A_{G_2}(\lambda) \cdots A_{G_k}(\lambda)$.*

Proposição 2.16 [18] Para $i = \{1, 2\}$, seja G_i um grafo regular de grau r_i com n_i vértices. Tem-se que o polinômio característico do join $G_1 \vee G_2$ é dado por

$$A_{G_1 \vee G_2}(\lambda) = [(\lambda - r_1)(\lambda - r_2) - n_1 n_2] \frac{A_{G_1}(\lambda) A_{G_2}(\lambda)}{(\lambda - r_1)(\lambda - r_2)}.$$

Proposição 2.17 [18] Se G é um grafo regular de grau k com n vértices e \overline{G} seu grafo complementar, então

$$A_{\overline{G}}(\lambda) = (-1)^n \frac{\lambda - n + k + 1}{\lambda + k + 1} A_G(-\lambda - 1).$$

Capítulo 3

Número Cromático e o Problema de Atribuição de Frequências

3.1 Coloração de vértices em Grafos

Uma coloração de vértices de um grafo $G = (V, E)$ é uma função

$$\varphi : V \rightarrow C$$

do conjunto de vértices de G para um conjunto C de cores dado. Uma coloração φ é *própria* se dois vértices adjacentes não recebem a mesma cor. Um grafo é *k-colorível* se ele admite uma coloração própria de vértices que utiliza k cores. O *número cromático* de um grafo G , denotado por $\chi(G)$, é o menor inteiro não negativo tal que G é k -colorível. O número cromático de um grafo G é, portanto, o número mínimo de conjuntos independentes no qual os vértices de G podem ser particionados. Assim, $\chi(G) = k$ se o grafo G é k -colorível e não é $(k - 1)$ -colorível. Na Figura 3.1, utilizamos uma 4-coloração dada pelos rótulos nos vértices no grafo. No entanto, podemos colorir este grafo G utilizando apenas 3 cores que é o menor número de cores possível para que vértices adjacentes recebam cores distintas. Portanto, seu número cromático é $\chi(G) = 3$.

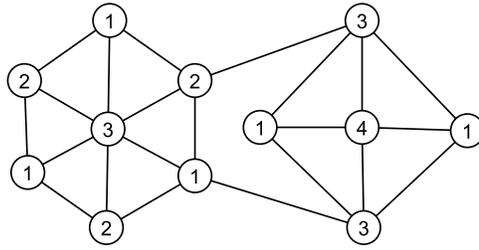


Figura 3.1: Uma 4-coloração própria do grafo G .

A determinação do número cromático de um grafo é um problema NP-difícil [31]. Por isso, é muito útil determinar limites para este invariante, a partir de outros conhecidos. Dentre tais invariantes podemos considerar os *espectrais* que, como já visto, são aqueles determinados em função dos autovalores do grafo. Entre os resultados disponíveis na literatura relacionados ao número cromático, destacamos aqueles mais importantes para o nosso trabalho e que podem ser encontrados em [18], [41], [62], [37], [63], [12] e [55].

O primeiro resultado que segue, mostra que o número de cores que podemos atribuir a um grafo G está compreendido entre os valores de 1 e n .

Proposição 3.1 [12] *Para todo grafo G de ordem n , temos $1 \leq \chi(G) \leq n$, sendo que o valor 1 é atingido, se G é o grafo nulo e o valor n é atingido, se G é o grafo completo K_n .*

Um tanto óbvio, mas frequentemente usado, é o limite inferior para o número cromático envolvendo o seu subgrafo.

Teorema 3.2 [12] *Seja H um subgrafo de um grafo G . Então, $\chi(H) \leq \chi(G)$.*

O próximo resultado é consequência imediata do Teorema 3.2. O Corolário 3.3, que segue, nos garante que o tamanho da maior clique de um grafo, ou seja, o número clique $\omega(G)$, é um limite inferior para o número cromático $\chi(G)$. Tal limite é atingido para todos os grafos perfeitos, [33].

Corolário 3.3 [12] *Para todo grafo G ,*

$$\omega(G) \leq \chi(G).$$

As Proposições 3.4 e 3.5, que seguem, abordam o número cromático de grafos obtidos por duas operações muito usuais a união e o *join* entre dois grafos.

Proposição 3.4 [37] *O união dos grafos G e H tem como número cromático o maior valor dentre os números cromáticos de cada componente, ou seja,*

$$\chi(G \cup H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}.$$

Proposição 3.5 [37] *O join dos grafos G e H tem como número cromático a soma dos números cromáticos de cada grafo componente, ou seja,*

$$\chi(G \vee H) = \chi(G) + \chi(H).$$

A próxima proposição caracteriza os grafos bipartidos via número cromático.

Proposição 3.6 [12] *G é um grafo bipartido e não nulo se e somente se $\chi(G) = 2$.*

Os caminhos P_n , as árvores T_n , os ciclos de comprimento par C_{2k} e o grafo cubo Q_n são grafos bipartidos. Logo, seus respectivos números cromáticos são iguais a 2.

Proposição 3.7 [37] *Para todo ciclo de comprimento ímpar C_{2k+1} , seu número cromático é $\chi(C_{2k+1}) = 3$.*

Não existe uma fórmula que expresse exatamente o número cromático de um grafo qualquer. Deste modo, torna-se útil a obtenção de limites para este invariante. O primeiro resultado, apresenta limites para o número cromático de um grafo envolvendo o número de independência $\alpha(G)$ que consiste na máxima cardinalidade dentre aquelas dos conjuntos independentes dos vértices de G .

Teorema 3.8 [12] *Se G é um grafo de ordem n , então*

$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1.$$

Sabemos que $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$ e o próximo resultado afirma que $\chi(G)$ pode estar mais próximo de $\omega(G)$ que de n .

Teorema 3.9 [12] *Para todo grafo G de ordem n*

$$\chi(G) \leq \lfloor \frac{n + \omega(G)}{2} \rfloor.$$

Os dois teoremas que seguem nos dão limites superiores para o número cromático em função do grau máximo de G .

Teorema 3.10 [12] *Para todo grafo G ,*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

A igualdade ocorre se G é um grafo completo ou é um grafo com ciclo de comprimento ímpar.

A prova, feita por *Brooks*, de que somente os ciclos ímpares e os grafos completos satisfazem o Teorema 3.10 pode ser encontrada em [12].

Teorema 3.11 [12] *Se o grafo G é conexo, não completo e diferente do ciclo ímpar, então*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Os próximos resultados relacionam o número cromático com parâmetros espectrais. O teorema a seguir é devido a *Wilf* e sua prova pode ser encontrada em [62]. Este resultado é muito importante para o nosso trabalho e será utilizado em uma de nossas contribuições dadas no Capítulo 5.

Teorema 3.12 [62] *Seja $\chi(G)$ o número cromático de G e λ_1 o A -índice de um grafo conexo G , então*

$$\chi(G) \leq \lambda_1 + 1.$$

A igualdade é válida se e somente se G é um grafo completo ou um ciclo de comprimento ímpar.

A próxima proposição estabelece um limite inferior para o número cromático $\chi(G)$, em função do índice de G e do seu número de vértices.

Proposição 3.13 [18] *Se G é um grafo com n vértices, com índice λ_1 e número cromático $\chi(G)$, então*

$$\chi(G) \geq \frac{n}{n - \lambda_1}.$$

Em 2007, *Nikiforov* [55] apresentou um limite inferior para o número cromático envolvendo o A -índice e o L -índice de um grafo G .

Teorema 3.14 [55] *Seja G é um grafo com n vértices, então*

$$\chi(G) \geq 1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \mu_1}.$$

Finalizamos esta seção apresentando um resultado devido a *Hoffman* [41] que relaciona o número cromático de G com o seu índice e com o menor autovalor da sua matriz de adjacência.

Teorema 3.15 [41] *Se λ_1 ($\lambda_1 \neq 0$) e λ_n são respectivamente o maior e o menor autovalores e $\chi(G)$ o número cromático de G , então*

$$\chi(G) \geq 1 + \frac{\lambda_1}{-\lambda_n}.$$

Em 2001, utilizando o Teorema 3.15, *Gregory et al* [34] relacionaram pela primeira vez o número cromático $\chi(G)$ com o A -spread. Eles provaram a seguinte desigualdade,

$$s_A(G) \leq \chi(G)|\lambda_n|. \tag{3.1}$$

No Capítulo 4 apresentamos um resultado nosso que estabelece o número cromático como um limite inferior para o $spread$.

3.2 Problema de Atribuição de Frequências

Neste trabalho, quando nos referimos ao problema de coloração, estamos particularmente interessados no problema de coloração de vértices. Tal problema, em geral, é aplicado a problemas relacionados ao particionamento de um grafo em conjuntos de vértices que recebem a mesma cor. Dentre eles se encontra aquele que vamos abordar que é o *Problema de Atribuição de Frequências*, cujo objetivo é atribuir cada frequência de rádio ou telefonia a um determinado transmissor escolhido entre um conjunto de transmissores disponíveis de modo que a interferência entre as frequências utilizadas seja minimizada.

O Problema de Atribuição de Frequências (PAF) é muito conhecido na área de telecomunicações e pode ser aplicado a problemas relacionados a transmissão de informação via rádio-frequências. Dado um conjunto de n transmissores, o PAF consiste na distribuição de frequências ou canais de rádio entre os transmissores disponíveis de tal forma que sejam satisfeitas várias restrições a serem armazenadas em uma dada matriz e que seja minimizado o valor de uma determinada função objetivo de modo que as interferências ocasionadas pelas atribuições sejam mínimas.

Uma *matriz de restrição* $W = [w_{ij}]$ é uma matriz quadrada de ordem n tal que $w_{i,j}$ representa a distância mínima entre dois transmissores i e j para que os mesmos funcionem sem causar interferência. Para $i = 1, 2, \dots, n$, se f_i denota a frequência atribuída ao transmissor i , então para limitar a interferência é exigido que $|f_i - f_j| \geq w_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq j \leq n$. Dado um PAF com n transmissores e uma matriz de restrições $W = [w_{ij}]$, tem-se que uma *atribuição viável* para o problema é uma aplicação

$$f : \{1, \dots, n\} \mapsto \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\},$$

onde

$$|f_i - f_j| \geq w_{ij}, \text{ para todo } i \text{ e } j, i \neq j.$$

Em 1980, *Hale* [38] sugeriu uma modelagem baseada em Teoria de Grafos para

atender problemas de alocação de frequências. Para isso, basta considerar cada transmissor i como um vértice de um grafo, sendo que dois pares de transmissores (ou vértices) sejam ligados por uma aresta quando ocorre algum tipo de restrição. Ainda neste trabalho, *Hale* [38] observou que para tais problemas, onde as restrições são mais complexas, o modelo tradicional de coloração de grafos não é suficientemente adequado para resolver o problema. Assim, ele introduziu um problema de coloração generalizado que hoje é tratado na literatura como problema de T -coloração de um grafo.

Uma T -coloração é um tipo especial de coloração em que algumas cores de um determinado conjunto são proibidas de serem atribuídas aos vértices do grafo. Dado um grafo $G(V, E)$ e um conjunto finito $T \subset \mathbb{N}$, os vértices de V representam os n transmissores, $1, 2, \dots, n$, para os quais se deseja alocar as frequências f_i , de modo que a transmissão possa funcionar sem interferências. O conjunto de arestas E é valorado para representar a distância em que os transmissores deverão ser mantidos um dos outros. Assim, uma T -coloração é uma aplicação $F : V \rightarrow \mathbb{N}$ de tal modo que $\{i, j\} \in E \Rightarrow |f_i - f_j| \notin T$.

Observe que se $T = \{0\}$, o problema da T -coloração se reduz ao problema clássico de coloração de grafos.

De acordo com *Hale* [38], o FAP pode contemplar diversos objetivos. Dentre eles, o de minimizar a diferença $|f_i - f_j|$ entre a maior frequência alocada f_i e a menor f_j . Esta diferença, conhecida como *span*, representa o espaço do espectro de frequência a ser utilizado. O *span* de uma dada atribuição é definido como o *span* de um grafo valorado, usualmente denotado por $span(G)$. Se o grafo $G(V, E)$ é não valorado, podemos considerar a matriz de restrição W como sendo a matriz de adjacência do grafo. De acordo com *Heuvel et al.* [40] quando G é não valorado, obtém-se a seguinte relação entre o número cromático $\chi(G)$ e o *span* $sp(G)$ de um grafo,

$$sp(G) = \chi(G) - 1. \quad (3.2)$$

Exemplo 3.16 *Considere o grafo G e sua matriz de adjacência representados como*

a seguir:

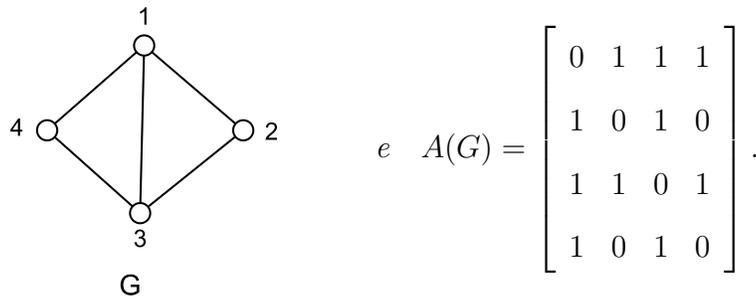


Figura 3.2: Grafo G e sua matriz de adjacência $A(G)$.

O grafo G é não valorado. Assim, a matriz de restrição coincide com a de adjacência $A(G)$. Dentre todas as atribuições viáveis, destacamos, como exemplo, as duas que seguem. À primeira chamaremos de f e a segunda de \bar{f} .

$$\left\{ \begin{array}{l} f : \{1, 2, 3, 4\} \mapsto \mathbb{R}_+ \\ f_1 \mapsto 0 \\ f_2 \mapsto 1 \\ f_3 \mapsto 2 \\ f_4 \mapsto 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{f} : \{1, 2, 3, 4\} \mapsto \mathbb{R}_+ \\ \bar{f}_1 \mapsto 0 \\ \bar{f}_2 \mapsto 2 \\ \bar{f}_3 \mapsto 3 \\ \bar{f}_4 \mapsto 2 \end{array} \right.$$

Observe que para a função f temos $|f_2 - f_4| = 0$, o que é possível pois entre 2 e 4 não há aresta em G . Para as demais atribuições de f , $|f_i - f_j| \geq a_{i,j}$, o que mostra a viabilidade de f . A prova que \bar{f} é viável é analogamente verificada. Note que a menor faixa (maior atribuição subtraída da menor) é obtida por f e não por \bar{f} . Pode-se verificar que dentre todas as atribuições possíveis, a que minimiza a faixa é a primeira, ou seja, o $sp(G) = 2$. É fácil ver que, para o grafo G dado, $\chi(G) = 3$. Logo a relação 3.2 é satisfeita.

Até mesmo para o caso mais simples em que G é não valorado, a determinação do $span(G)$ apresentada em (3.2) é um problema NP-Difícil, pelo simples fato de que a determinação do número cromático $\chi(G)$ já o é.

Capítulo 4

M-Spread

Sejam $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n$ os M -autovalores de uma matriz arbitrária. O *spread* de M é definido por

$$s(M) = \max_{ij} |\gamma_i - \gamma_j|, \quad (4.1)$$

onde o máximo é tomado sobre todos os módulos de pares dos autovalores de M .

Os primeiros trabalhos referentes ao *spread* de uma matriz estão relacionados à obtenção de limites inferiores ou superiores para o mesmo. Por exemplo, se $M = [m_{ij}]$ é uma matriz Hermitiana, *Mirsky* [52] apresentou os seguintes limites inferiores para $s(M)$:

$$s(M) \geq 2 \max_{i \neq j} |m_{ij}| \quad (4.2)$$

e

$$s(M) \geq \max_{i \neq j} \{(m_{ii} - m_{jj})^2 + 4|m_{ij}|^2\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.3)$$

Observe que os limites encontrados só dependem das entradas da matriz M . Para mais informações sobre o *spread* de uma matriz arbitrária, consulte as referências [44], [56] e [61].

Nesse capítulo, nosso interesse é estudar o *M-spread*, quando M é uma das matrizes associadas a um grafo qualquer, ou seja, estamos interessados nos resultados

relativos ao A -spread, L -spread e Q -spread. As três primeiras seções apresentam uma coleção de resultados da literatura para os invariantes espectrais, o índice e o menor autovalor que, conseqüentemente, irão fornecer resultados para o spread das matrizes de adjacência, laplaciana e laplaciana sem sinal. As seções restantes apresentam resultados novos e novas conjecturas obtidas durante o desenvolvimento deste trabalho.

4.1 A -spread

O A -spread de G é o invariante obtido por (4.1) quanto M é a matriz de adjacência de um grafo G . Sendo $A(G)$ simétrica, seus autovalores são reais. Assim, podemos ordenar seus autovalores de modo que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Logo, a máxima distância entre todos os pares de autovalores é exatamente dado pela diferença entre o maior autovalor λ_1 e o menor autovalor λ_n . Como $\lambda_1 - \lambda_n \geq 0$, na expressão do A -spread $s_A(G)$ podemos dispensar o módulo,

$$s_A(G) = \lambda_1 - \lambda_n.$$

Inicialmente, apresentamos alguns resultados da literatura relativos ao índice e ao menor autovalor da matriz $A(G)$. Depois disto, apresentamos alguns resultados relacionados ao próprio invariante que desejamos estudar, ou seja, $s_A(G)$.

O primeiro resultado que segue mostra que o índice da matriz de adjacência está entre o grau médio e o grau máximo de G . Uma consequência direta desse resultado é que se G é k -regular, então $\lambda_1(G) = k$.

Proposição 4.1 [18] *Seja G um grafo com n vértices, $d(G)$ a média dos graus de G e $\Delta(G)$ seu grau máximo. Então, $d(G) \leq \lambda_1(G) \leq \Delta(G)$.*

O próximo resultado dá os valores mínimos e máximos do A -índice de um grafo conexo e diz que os grafos extremais para ele são, respectivamente, o caminho e o grafo completo.

Proposição 4.2 [15] *Se G é um grafo conexo de ordem n , então*

$$2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \leq \lambda_1(G) \leq n-1,$$

sendo que o valor mínimo é atingido no grafo caminho P_n e o valor máximo é atingido no grafo completo K_n .

A proposição seguinte nos dá o valor máximo do índice da matriz de adjacência para qualquer que seja a árvore e mostra que tal valor é atingido pela estrela.

Proposição 4.3 [15] *Se T é uma árvore de ordem n , então*

$$\lambda_1(T) \leq \lambda_1(K_{1,n-1}) = \sqrt{n-1}.$$

Já o próximo resultado apresenta o menor valor possível para o índice da matriz de adjacência de qualquer grafo unicíclico e prova que o ciclo C_n é um grafo extremal para este invariante.

Proposição 4.4 [42] *Se G é um grafo conexo unicíclico, então*

$$\lambda_1(G) \geq \lambda_1(C_n) = 2.$$

A Proposição 4.5 fornece um limitante superior para o A -índice e um limitante inferior para o menor autovalor λ_n da matriz de adjacência de um grafo.

Proposição 4.5 [18] e [8] *Seja G um grafo conexo com n vértices e m arestas, então*

$$\lambda_1(G) \leq \sqrt{2m\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

e

$$\lambda_n(G) \geq -\sqrt{2m\left(1 - \frac{1}{n}\right)}.$$

A próxima proposição, que pode ser encontrada em [36], apresenta algumas propriedades do menor autovalor λ_n da matriz de adjacência de um grafo.

Proposição 4.6 [36] *Seja G um grafo conexo com $n > 1$ vértices. Tem-se que*

(i) $\lambda_n \notin (-\sqrt{2}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$;

(ii) $\lambda_n = -1$ se e somente se $G = K_n$;

(iii) $\lambda_n = -\sqrt{2}$ se e somente se $G = K_{1,2}$;

(iv) *Existem muitos grafos com $\lambda_n \in (-2, -\sqrt{2})$.*

Como consequência imediata da Proposição 4.6, podemos deduzir que para todo grafo conexo com $n > 1$ vértices, $\lambda_n \leq -1$, sendo que somente os grafos completos são extremais para este invariante.

De acordo com Petrović [59], J. H. Smith em 1970, determinou todos os grafos cujo maior autovalor de $A(G)$ não excede 2. Em 1982, Cvetković et al. [19] determinaram todos os grafos minimais cujo maior autovalor é superior a 2. Já sabemos que quando G é um grafo bipartido, $\lambda_1(G) = -\lambda_n(G)$. Logo, este fato é válido para as árvores. Como $s_A(T) = 2\lambda_1(T)$, a determinação das árvores minimais cujo o índice é superior a 2 é equivalente a determinação das árvores com *spread* superior a 4.

O Lema 4.7, descrito a seguir, foi usado por Petrović [59] para provar a Proposição 4.8 que determina todos os grafos minimais com respeito a propriedade de se ter $s_A(G) > 4$. Tais grafos estão exibidos na Figura 4.1. A prova do referido lema está diretamente relacionada ao Teorema 2.6 e pode ser encontrada em [59].

Lema 4.7 [59] *Se H é um subgrafo induzido de G , então*

$$s_A(H) \leq s_A(G).$$

Proposição 4.8 [59] *Há exatamente 30 grafos minimais conexos com respeito a propriedade de $s_A(G) > 4$. Todos estes grafos minimais estão na Figura 4.1.*

Da Proposição 4.8 podemos deduzir que qualquer subgrafo induzido de um dos 30 grafos apresentados na Figura 4.1 tem necessariamente $s_A(G) \leq 4$.

No exemplo a seguir, consideramos um dos grafos da Figura 4.1 e mostramos de fato que todos os seus subgrafos induzidos tem $s_A(G) \leq 4$.

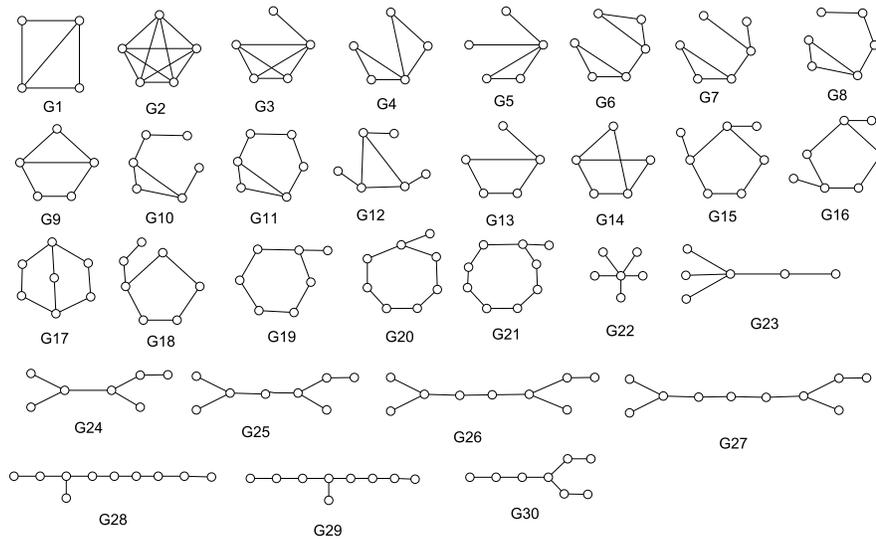


Figura 4.1: Grafos minimais com $s_A(G) > 4$.

Exemplo 4.9 Tomemos na Figura 4.1 o grafo G_2 que é o K_5 . Sabe-se que seu spread é $s_A(K_5) = 5$. Todos os subgrafos induzidos próprios e não-isomorfos a K_5 , que denotamos por S_1, S_2, S_3 e S_4 , estão na Figura 4.2, junto com os valores dos seus respectivos spreads.

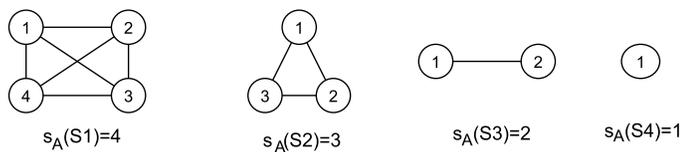


Figura 4.2: Subgrafos induzidos próprios de K_5 com $s_A(G) \leq 4$.

Proposição 4.10 [59] *Seja G um grafo conexo. O spread de G é no máximo igual a 4, ou seja, $s_A(G) \leq 4$ se e somente se G é um subgrafo induzido de um dos grafos da Figura 4.3.*

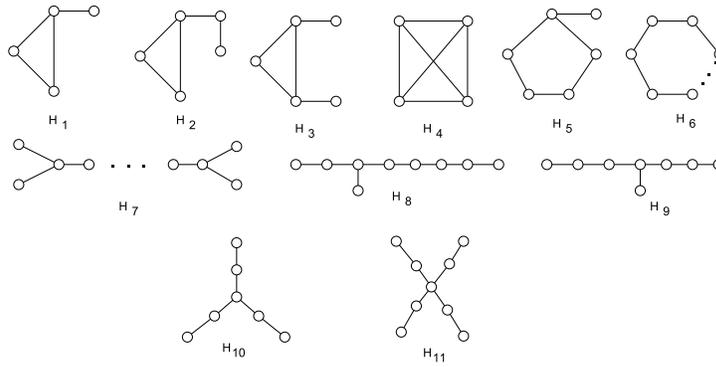


Figura 4.3: Grafos para os quais os subgrafos induzidos tem $s_A(G) \leq 4$.

No Exemplo 4.11 tomamos o grafo $G = H_2$, dado na Figura 4.3, e mostramos que todos os subgrafos conexos induzidos de H_2 , a menos de isomorfismos, possuem $s_A(H_2) \leq 4$.

Exemplo 4.11 *Considere o grafo H_2 na Figura 4.3. Seus subgrafos conexos induzidos, aqui denotados por H_{2i} , $i = 1, \dots, 7$, estão na Figura 4.4, com os valores dos seus respectivos spreads. Note que todos os subgrafos conexos induzidos de H_2 possuem $s_A(H_2) \leq 4$.*

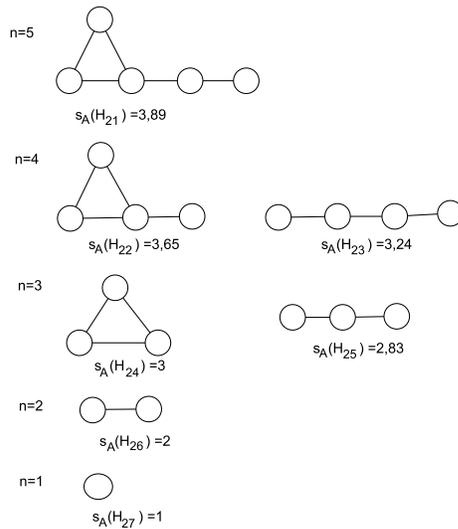


Figura 4.4: Subgrafos conexos induzidos de H_2 .

Gregory et. al [34] apresentaram um limite superior para o *spread* de um grafo qualquer com n vértices e m arestas, em função do índice.

Proposição 4.12 [34] *Para um grafo G com n vértices e m arestas,*

$$s_A(G) \leq \lambda_1 + \sqrt{2m - \lambda_1^2} \leq 2\sqrt{m}. \quad (4.4)$$

As igualdades são atendidas se e somente se $G = K_{a,b}$, para valores de a e b tais que $m = ab$ e $a + b \leq n$.

O problema de determinar quais são os grafos com o *spread* máximo dentre todos os grafos de mesma ordem é um problema difícil [27]. Por isso, há interesse em restringirmos esta discussão para algumas classes especiais de grafos. Gregory et. al [34] apresentaram resultados relativos ao *spread* máximo em algumas classes especiais e também provaram um resultado geral para o *spread* mínimo. O primeiro resultado que aparece a seguir é referente a grafos regulares.

Proposição 4.13 [34] *Se G é um grafo regular então $s_A(G) \leq n$. A igualdade é verdadeira se e somente se \overline{G} é desconexo.*

O ciclo C_4 atende a igualdade da Proposição 4.13.

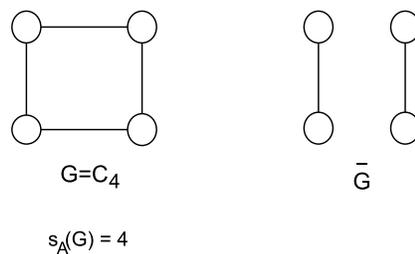


Figura 4.5: O ciclo C_4 tem $s_A(C_4) = 4$ e seu complementar $2K_2$ é desconexo.

Gregory et al [34] também apresentaram uma classe de grafos para os quais $s_A(G) > n$. Tais grafos pertencem a classe formada pelos grafos $G(n, k) = SC(n, k)$, com $1 \leq k \leq n - 1$. Enquanto a Figura 4.6 exhibe os grafos $G(n, k)$, para $n = 4$ e $k = 1, 2$ e 3, a Figura 4.7 exhibe os grafos $G(n, k)$, para $n = 5$ e $k = 1, 2, 3$ e 4.

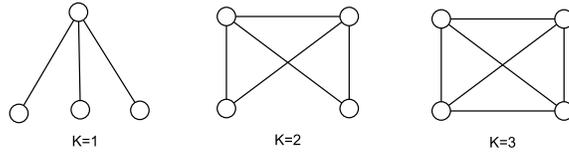


Figura 4.6: Todos os grafos $G(n, k)$ com $n=4$ e $s_A(G) > 4$.

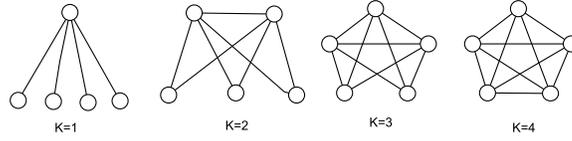


Figura 4.7: Todos os grafos $G(n, k)$ com $n=5$ e $s_A(G) > 5$.

Usando a Proposição 2.16, podemos expressar o polinômio característico de $G(n, k)$ por $p_{G(n,k)}(\lambda) = \lambda^{n-k-1}(\lambda + 1)^{k-1}[\lambda^2 - (k - 1)\lambda - k(n - k)]$. Isto implica que $s_A(G(n, k)) = \sqrt{(k - 1)^2 + 4k(n - k)}$. Assim, $s_A(G(n, k)) > n$, quando $\frac{n+1}{3} < k < n - 1$. Além disso, *Gregory et al* [34] provaram que $s_A(G(n, k))$ atinge o máximo, quando $k = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$. Baseando-se neste resultado, eles propuseram a seguinte conjectura:

Conjectura 4.14 [34] *Dentre todos os grafos conexos com n vértices, o spread máximo é atingido para o grafo $G(n, \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor) = K_{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor} \vee \overline{K}_{n - \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor}$.*

A Figura 4.8 exhibe o grafo $K_4 \vee \overline{K}_2$ que de acordo com a Conjectura 4.14, possui *spread* máximo dentre todos os grafos conexos de 6 vértices. Sendo, $\lambda_1 = 4,70$ e $\lambda_n = -1,70$, ou seja, $s_A(K_4 \vee \overline{K}_2) = 6,40$.

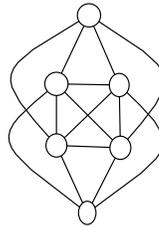


Figura 4.8: $K_4 \vee \overline{K}_2$ tem o spread máximo dentre os grafos conexos com $n = 6$ vértices.

Em 2008, *Liu et al* [48] obtiveram novos limites superiores e inferiores para $s_A(G)$. Dentre os resultados apresentados por eles, destacamos a Proposição 4.15. Para enunciá-la, é necessário definir o parâmetro

$$M_1 = \frac{1}{2}tr(A^4) + m - 4f,$$

onde f representa o número de ciclos de comprimento 4 em um grafo. A proposição apresentada a seguir, melhora o resultado apresentado em (4.4), mas somente para os grafos livres de K_4 .

Proposição 4.15 [48] *Seja G um grafo livre de K_4 com n vértices e m arestas com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, tem-se que*

$$s_A(G) \leq \lambda_1 + \sqrt[4]{2M_1 - 2m + 8f - \lambda_1^4} \leq \sqrt[4]{M_1 - m + 4f}. \quad (4.5)$$

As desigualdades são atendidas na igualdade se e somente se $G = K_{a,b}$, para valores de a e b tais que $m = ab$ e $a + b \leq n$.

O próximo exemplo exhibe um grafo livre de K_4 e ilustra que a desigualdade (4.5) é melhor do que a apresentada em (4.4).

Exemplo 4.16 *Considere o grafo G apresentado na Figura 4.9:*

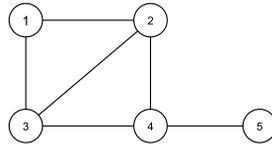


Figura 4.9: Grafo livre de K_4

A matriz de adjacência de G , o valor de M_1 e o valor do índice λ_1 são dados a seguir:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, M_1 = \frac{1}{2}tr(A^4) + m - 4f = 32 \text{ e } \lambda_1 = 2,64.$$

Obtem-se, para a desigualdade em (4.4), $s_A(G) \leq 4,88$ e, para a desigualdade (4.5), $s_A(G) \leq 4,52$. Logo, como esperado, o limite dado por (4.5) é melhor do que o dado por (4.4).

As Proposições 4.17 e 4.18, a seguir, determinam os grafos com máximo *spread* dentro da classe dos unicíclicos. Antes porém, algumas definições e notações se fazem necessárias.

Denotemos por \mathcal{U}_n o conjunto de todos os grafos unicíclicos conexos com n vértices e por \mathcal{U}_n^k , o conjunto de grafos unicíclicos conexos de ordem n e cintura k . Para k , $3 \leq k \leq n$, denote por \mathbf{S}_n^k , o grafo obtido do ciclo C_k pela adição de $(n - k)$ arestas pendentes a um único vértice do ciclo.

Fan et al [27] determinaram os grafos com *spread* máximo nas classes \mathcal{U}_n^k e \mathcal{U}_n . Estes resultados podem ser observados nas duas proposições a seguir.

Proposição 4.17 [27] *Seja $G \in \mathcal{U}_n^k$. Tem-se que $s_A(G) \leq s_A(\mathbf{S}_n^k)$, com a igualdade verdadeira se e somente se $G = \mathbf{S}_n^k$.*

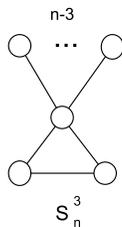


Figura 4.10: S_n^3 é o grafo de cintura 3 que atende a Proposição 4.17

Veremos na próxima proposição que o grafo da Figura 4.10 que maximiza o *spread*, dentre os unicíclicos de cintura 3, é o mesmo que maximiza o *spread* dos unicíclicos de ordem n , com $n \geq 6$.

Proposição 4.18 [27] *Seja $G \in \mathcal{U}_n$. Tem-se que,*

1. *para $n = 4$ e 5 , $s_A(G) \leq s_A(\mathbf{S}_n^4)$, com igualdade verdadeira se e somente se $G = \mathbf{S}_n^4$;*
2. *para $n \geq 6$, $s_A(G) \leq s_A(\mathbf{S}_n^3)$, com igualdade válida se e somente se $G = \mathbf{S}_n^3$.*

Com relação aos grafos com $s_A(G)$ mínimo, da Proposição 4.2, temos:

$$\lambda_1(G) \geq \lambda_1(P_n) = 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right). \quad (4.6)$$

Usando (4.6) e o fato que P_n é um grafo bipartido, segue que,

$$s_A(P_n) = 2\lambda_1(P_n) = 4\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right). \quad (4.7)$$

A Proposição 4.19 a seguir, mostra que o valor encontrado em (4.7) é o menor valor possível para o spread dos grafos conexos.

Proposição 4.19 [34] *Se G é um grafo conexo com n vértices, então $s_A(G) \geq s_A(P_n)$. A igualdade é verdadeira se e somente se $G = P_n$.*

A prova da Proposição 4.19 está fortemente ligada ao resultado que estabelece uma condição para que um subgrafo H de G tenha $s_A(H) \leq s_A(G)$. Este resultado foi provado por *Gregory et al*, veja [34], e segue reescrito como:

Proposição 4.20 [34] *Se H é um subgrafo bipartido de um grafo G então*

$$s_A(H) \leq s_A(G).$$

4.2 *L-spread* e o *spread laplaciano*

De modo similar como foi feito para a matriz de adjacência, podemos definir o *spread* para a matriz laplaciana, denominado *L-spread* que consiste da diferença entre o índice laplaciano μ_1 e o menor autovalor laplaciano μ_n . No entanto, $\mu_n = 0$, veja [51]. Assim, o *L-spread* coincide com o índice da matriz laplaciana, ou seja,

$$s_L(G) = \mu_1(G).$$

Conseqüentemente, investigar o *spread* da matriz laplaciana é o mesmo que investigar o índice dessa matriz. Como já há vários resultados sobre o índice da laplaciana, o próximo capítulo será dedicado a um invariante espectral, conhecido como *spread laplaciano*, cuja definição é similar a do *spread* por tratar da diferença entre o índice e a conectividade algébrica. Na sequência, apresentamos alguns resultados relativos à matriz laplaciana importantes para o nosso trabalho. Outros resultados relacionados aos autovalores desta matriz podem ser encontrados em [51] e [24].

Proposição 4.21 [4] *Seja G um grafo de ordem $n \geq 2$. Então, $\mu_1(G) \leq n$. A igualdade vale se e somente se o grafo complementar de G é desconexo.*

Proposição 4.22 [35] *Seja G um grafo de ordem $n \geq 2$ contendo pelo menos uma aresta. Então, $\mu_1(G) \geq \Delta(G) + 1$. Se G é conexo, então a igualdade vale se e somente se $\Delta(G) = n - 1$.*

Cvetković et.al em [22] apresentaram uma conexão entre os autovalores das matrizes de adjacência e laplaciana de um grafo *k-regular*.

Proposição 4.23 [22] *Seja G um grafo com k -regular, então*

$$\mu_i = k - \lambda_{n+1-i}$$

O próximo resultado exhibe o espectro da matriz laplaciana de um grafo G , onde G pode ser escrito com o *join* de dois grafos G_1 ou G_2 , ou seja, $G = G_1 \vee G_2$. Este resultado pode ser encontrado em [53].

Proposição 4.24 [53] *Sejam G_1 e G_2 grafos com k e m vértices respectivamente, com autovalores laplacianos $0 = \mu_k(G_1) \leq \mu_{k-1}(G_1) \leq \dots \leq \mu_1(G_1)$ e $0 = \mu_m(G_2) \leq \mu_{m-1}(G_2) \leq \dots \leq \mu_1(G_2)$ respectivamente, então os autovalores laplacianos de $G_1 \vee G_2$ são dados por $0, \mu_{k-1}(G_1) + m, \dots, \mu_1(G_1) + m, \mu_{m-1}(G_2) + k, \dots, \mu_1(G_2) + k$ e $m + k$.*

A proposição a seguir mostra um resultado similar ao Teorema 2.6. Sendo que neste caso, os autovalores dos grafos G e $G - e$ se entrelaçam, onde e é uma aresta do grafo G .

Proposição 4.25 [22] *Seja e uma aresta do grafo G e se $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ e sejam $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$ os L -autovalores de G e $G - e$, respectivamente. Então*

$$\mu_1 \geq s_1 \geq \mu_2 \geq s_2 \dots \geq s_{n-1} \geq \mu_n \geq s_n = 0.$$

Finalizamos esta seção, apresentando os autovalores laplacianos de um grafo *threshold* em função do grau dos vértices de G .

Proposição 4.26 [9] *Sejam G um grafo *threshold* com n vértices e d_v o grau do vértice v . Então,*

$$\mu_j = |\{v \in V / d_v \geq j\}|.$$

4.3 Q -spread

De forma similar às matrizes de adjacência e laplaciana, podemos definir o *spread da matriz laplaciana sem sinal* como $s_Q(G) = q_1 - q_n$. Como sabemos, a matriz laplaciana sem sinal é semidefinida positiva mas não necessariamente singular. Assim, seus autovalores podem ser positivos ou nulos. Inicialmente, apresentamos uma condição para que q_n seja igual a 0.

Proposição 4.27 [49] *Se G é conexo, então $q_n = 0$ se e somente se G é bipartido. Além disso, se G é bipartido, $Q(G)$ e $L(G)$ compartilham o mesmo espectro.*

Logo, para os bipartidos, os resultados sobre L -spread podem ser estendidos para Q -spread. Além disso, para estes casos, temos que $s_Q(G) = q_1 = \mu_1$, ou seja, o índices das referidas matrizes são iguais ao spread da matriz laplaciana sem sinal.

Os resultados que seguem são relativos ao índice da matriz laplaciana sem sinal. Diversos outros podem ser encontrados em [17] e [20].

Proposição 4.28 [21] *Seja G um grafo conexo com $n \geq 4$ vértices, então*

$$2 + 2\cos\frac{\pi}{n} \leq q_1 \leq 2n - 2,$$

com igualdade sendo verdadeira para o limite inferior se e somente se G é isomorfo a P_n e para o limite superior se e somente se G é isomorfo ao grafo completo K_n .

Proposição 4.29 [21] *Seja G um grafo com n vértices. Então, $2\bar{d} \leq q_1 \leq 2\Delta$. As igualdades valem se e somente se G é regular.*

Proposição 4.30 [39] *Seja G um grafo conexo com n vértices. Então,*

$$\Delta + 1 \leq q_1 \leq \lambda_1 + \Delta.$$

O limite inferior é atingido se e somente se G é a estrela $S_{1,n-1}$ e o limite superior é atingido se e somente se G é regular.

Yan [64] apresenta uma relação envolvendo os índices da matriz de adjacência e da matriz laplaciana sem sinal

$$2\lambda_1(G) \leq q_1(G) \tag{4.8}$$

e, em [17], encontramos uma relação entre os índices da matriz laplaciana e laplaciana sem sinal

$$\mu_1(G) \leq q_1(G). \quad (4.9)$$

Recentemente, *K. Das* [25] e *Lima et al.* [47], independente um do outro, obtiveram limites superiores para $q_n(G)$.

Proposição 4.31 [25] *Seja δ o grau mínimo de G . Então, $q_n(G) < \delta$.*

Proposição 4.32 [47] *Seja G um grafo com n vértices e m arestas, então*

$$q_n(G) \leq \bar{d} - 1,$$

onde \bar{d} é a média dos graus de G .

Proposição 4.33 [47] *Seja G um grafo com n vértices, m arestas e número cromático $\chi(G)$, então*

$$q_n(G) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(G) - 1}\right)\bar{d}.$$

Em 2010, *Oliveira et al* [58] provaram que dentre todos os grafos bipartidos com n vértices, o caminho P_n é um grafo extremal com o mínimo *spread*.

Proposição 4.34 [58] *Seja G um grafo bipartido conexo com n vértices, então*

$$s_Q(P_n) = 2 + 2\cos\frac{\pi}{n} \leq s_Q(G). \quad (4.10)$$

Baseado no resultado apresentado em (4.10) e com apoio de testes computacionais, os autores de [58] conjecturaram que $s_Q(G) \geq s_Q(P_n)$, para qualquer grafo G conexo com n vértices. Estes mesmos autores mostraram ainda que o *Q-spread* é limitado superiormente por $2n - 4$, para $n \geq 5$.

Proposição 4.35 [58] *Seja G um grafo com $n \geq 5$ vértices. Então, $s_Q(G) \leq 2n - 4$. A igualdade ocorre se e somente se $G = K_{n-1} \cup K_1$.*

Em 2010, *Liu et al* [49] determinaram alguns limites inferiores e superiores para o *Q-spread* e mostraram a proposição que segue.

Proposição 4.36 [49] *Sejam $n \geq 8$ e S_n^3 o grafo unicíclico exibido na Figura 4.11.*

Se $G \in \mathcal{U}_n \setminus \{S_n^3\}$ então $s_Q(S_n^3) > s_Q(G)$.

O resultado de *Liu et al* [49] prova que, dentre todos os grafos unicíclicos com n vértices, o grafo S_n^3 , (veja Figura 4.11) é o único que maximiza o Q -spread.

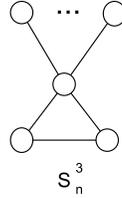


Figura 4.11: Grafo unicíclico S_n^3

O próximo resultado aplicado a matriz laplaciana sem sinal, é similar ao apresentado na Proposição 4.25.

Proposição 4.37 [17] *Seja e uma aresta do grafo G e sejam $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$ e $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$ os Q -autovalores de G e $G - e$, respectivamente. Tem-se que*

$$q_1 \geq s_1 \geq q_2 \geq s_2 \dots \geq s_{n-1} \geq q_n \geq s_n = 0.$$

Finalizamos esta seção apresentando as duas primeiras contribuições do nosso trabalho. Em 2010, *Oliveira et al* [58] provaram que $s_Q(G) \geq 2$. Provamos que tal resultado também é válido para as matrizes $A(G)$ e $L(G)$.

Proposição 4.38 *Para todo grafo G não nulo, $s_A(G) \geq 2$, $s_L(G) \geq 2$ e $s_Q(G) \geq 2$.*

Prova: Segue diretamente do resultado apresentado em (4.2). ■

A próxima proposição estabelece uma relação entre os Q -spread dos grafos G e $H = G - \{v\}$ o grafo obtido de G pela retirada de um vértice v .

Proposição 4.39 *Seja G um grafo com n vértices e $H = G - \{v\}$ o grafo obtido de G pela retirada de um vértice v . Então*

$$s_Q(G) \geq s_Q(H).$$

Prova: Sejam G um grafo com n vértices e v um vértice de G . Seja H o subgrafo de G obtido pela retirada do vértice v . Observe que $s_Q(G) = q_1(G) - q_n(G)$ e $s_Q(H) = q_1(H) - q_{n-1}(H)$. Do Teorema 2.6, $q_1(G) \geq q_1(H)$ e $q_{n-1}(H) \geq q_n(G)$. Logo, $s_Q(G) \geq s_Q(H)$. ■

4.4 *M-spreads* e o número cromático

Como se sabe, a determinação do número cromático de um grafo $\chi(G)$ é um problema NP-difícil [31]. Por isso, voltamos a enfatizar a importância de investigar limites que envolvam o número cromático de um grafo qualquer, uma vez que isto pode ser usado para acelerar a convergência de algoritmos e heurísticas na determinação deste invariante.

Uma importante ferramenta computacional que utilizamos no desenvolvimento dos nossos resultados foi o software AutoGráphix (AGX)[11]. Isto nos auxiliou a descrever classes de grafos que satisfazem certas propriedades, assim como a determinar grafos extremais pertencentes a tais classes.

Nesta seção, apresentamos a principal contribuição deste capítulo. Este resultado generaliza aqueles provados e publicados em [57]. Trata-se da prova de que o número cromático de um grafo qualquer tem como limites superiores tanto os *spreads* da matriz de adjacência quanto os das matrizes laplaciana e laplaciana sem sinal. No caso da matriz laplaciana sem sinal a prova foi determinada por *Lima et al.* [47].

Teorema 4.40 *Se G é um grafo conexo e M uma das matrizes a ele associadas, ou seja, $M = A, L$ ou Q , então*

$$\chi(G) \leq s_M(G). \quad (4.11)$$

A igualdade ocorre se e somente se $G \cong K_n$.

Prova:

1º caso: $M = A(G)$. Da Proposição 3.12, resultado este devido a *Wilf* [62], temos

que o número cromático de G é no máximo igual ao índice da matriz de adjacência mais 1, ou seja,

$$\chi(G) \leq \lambda_1 + 1. \quad (4.12)$$

Por outro lado, da Proposição 4.6 segue que $\lambda_n \leq -1$. Logo, $-\lambda_n \geq 1$. Deste modo, concluímos que

$$\chi(G) \leq \lambda_1 + 1 \leq \lambda_1 - \lambda_n. \quad (4.13)$$

Portanto, $\chi(G) \leq \lambda_1 - \lambda_n = s_A(G)$. Da Proposição 3.12, tem-se que a primeira desigualdade é válida na igualdade se e somente se G é um grafo completo ou um ciclo de comprimento ímpar. Além disso, $\lambda_1 + 1 = \lambda_1 - \lambda_n$, o que do Lema 4.6 implica que G é um grafo completo. Logo, a igualdade $\chi(G) = s_A(G)$ ocorre se e somente se $G = K_n$.

2^o caso: $M = L(G)$. Da Proposição 3.10 temos que

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1, \quad (4.14)$$

e da Proposição 4.22 segue que

$$\Delta(G) + 1 \leq \mu_1(G). \quad (4.15)$$

Das equações (4.14) e (4.15) chegamos a

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \leq \mu_1(G). \quad (4.16)$$

Portanto, $\chi(G) \leq \mu_1(G) = s_L(G)$. Agora, suponhamos que a primeira desigualdade em (4.16) seja válida na igualdade. Da Proposição 3.10, G é o grafo completo ou um ciclo de comprimento ímpar. Além disso, $\Delta(G) + 1 = \mu_1(G)$, o que da Proposição 4.22 chegamos a $\Delta(G) = n - 1$. Logo, G é o grafo completo.

3º caso: $M = Q(G)$. A prova para este caso foi realizada por *Lima et al.* [47]

e está fortemente relacionada ao limite para q_n , apresentado no Teorema 4.32, ou seja, $q_n \leq \frac{2m}{n} - 1$. Usando o fato de que $2\lambda_1 \leq q_1$, podemos escrever

$$s_Q(G) = q_1 - q_n \geq 2\lambda_1 - q_n \geq 2\lambda_1 - \frac{2m}{n} + 1 \geq \lambda_1 + 1 \geq \chi(G).$$

Na última desigualdade foi utilizado o limite superior de Wilf para o número cromático, apresentado no Teorema 3.12. ■

4.5 Seriam os M -spreads comparáveis?

Vimos no Teorema 4.40 que o número cromático de um grafo G é um limite inferior para os M -spreads, quando M é uma das matrizes associadas ao grafo. Além disso, provamos que, independente de M , o limite inferior é atingido no grafo completo K_n . Para um dado grafo G não isomorfo a K_n , investigamos quais dos M -spreads poderiam ser um melhor limite para o número cromático. No caso dos grafos bipartidos, provamos que o melhor limite superior para $\chi(G)$ é o *spread* da matriz de adjacência. É lógico que este resultado em si não é importante, pois neste caso sabemos que $\chi(G) = 2$, o que torna completamente desnecessário a determinação de limites para o número cromático de tais grafos. No entanto, é interessante saber que para os grafos bipartidos os M -spreads são totalmente ordenados.

Proposição 4.41 *Se G é um grafo bipartido então $s_A(G) \leq s_L(G) = s_Q(G)$.*

Prova: Como G é bipartido, da Proposição 4.27, $L(G)$ e $Q(G)$ compartilham o mesmo espectro. Logo, é imediato ver que, $s_L(G) = \mu_1 = q_1 = s_Q(G)$. Por outro lado, se G é bipartido temos $\lambda_1 = -\lambda_n \Rightarrow s_A(G) = 2\lambda_1$. Agora, é só aplicar a desigualdade de (4.8), ou seja, $2\lambda_1 \leq q_1$, e o resultado segue. ■

Quando o grafo não é bipartido, a Figura 4.12 mostra que a ordenação dos *spreads* pode ser completamente distinta da apresentada no caso anterior. Neste

caso, $s_Q(W_1) \cong 5.657 < s_A(W_1) \cong 5.744 < s_L(W_1) = 6.0$. Para o grafo da Figura 4.12, o melhor limite superior para $\chi(W_1)$ é o *Q-spread*. Já para o grafo da Figura 4.13, podemos observar uma outra ordenação também distinta das anteriores, $s_Q(W_2) = 6.93 > s_A(W_2) = 6,4 > s_L(W_2) = 6.0$. Para este grafo, o melhor limite superior para $\chi(W_2)$ é o *L-spread*.

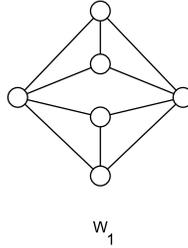


Figura 4.12: Grafo W_1 .

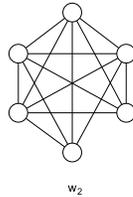


Figura 4.13: Grafo W_2 .

Os exemplos anteriores nos mostram que, no caso geral, não é possível ordenar os valores dos *M-spreads*, quando $M = A(G)$, $M = L(G)$ ou $M = Q(G)$. Como na classe dos bipartidos a ordenação é possível, resolvemos investigar se isto também ocorre em outras classes de grafos. A seguinte proposição mostra que para os grafos regulares todos os *spreads* são iguais.

Proposição 4.42 *Seja G é um grafo k -regular, então*

$$s_A(G) = s_L(G) = s_Q(G).$$

Prova: Seja G k -regular. Da Proposição 4.23, segue que $\mu_1 = k - \lambda_n$. Além disso, temos $s_A(G) = k - \lambda_n$. Assim,

$$s_A(G) = k - \lambda_n = k - (k - \mu_1) = \mu_1 = s_L(G).$$

Por outro lado, em 2010, *Liu et. al* [49] provou que para grafos regulares, $s_A(G) = s_Q(G)$. Para ver isto, basta observar que $q_i = \lambda_i + k$, $i = 1, \dots, n$. Logo o resultado segue. ■

4.6 Problema de Atribuição de Frequências versus os M -spreads

Nosso objetivo nesta seção é relacionar o M -spread e o $span$ de um grafo. O $span$ é um invariante estudado no Problema de Atribuição de Frequência (PAF). Da Proposição 3.15, devida a *Hoffman* [41], temos

$$\chi(G) \geq 1 + \frac{\lambda_1}{-\lambda_n}.$$

Vimos, na Seção 2.3, que a partir da relação anterior, *Gregory et al* [34] relacionaram pela primeira vez o número cromático ao A -spread, como segue,

$$s_A(G) \leq \chi(G)|\lambda_n|. \quad (4.17)$$

Por outro lado, no Teorema 4.40, obtivemos um limite inferior para o A -spread em função do número cromático, isto é, $\chi(G) \leq s_A(G)$. Da Proposição 4.6, temos que $|\lambda_n| \geq 1$. Logo, usando os limites superior e inferior para o A -spread, podemos escrever a seguinte relação:

$$\chi(G) \leq s_A(G) \leq \chi(G)|\lambda_n|. \quad (4.18)$$

Na Seção 3.2, vimos que para um grafo G não valorado, tem-se uma relação de igualdade envolvendo o $span$ e o número cromático, isto é, $span(G) = \chi(G) - 1$. Logo, segue da primeira parte da desigualdade (4.18) que

$$span(G) \leq s_A(G) - 1. \quad (4.19)$$

Este último resultado é bastante interessante, pois nos permite relacionar o $span$ com o A - $spread$ de um grafo. Entretanto, se usarmos a desigualdade de *Wilf*, dada no Teorema 3.12, isto é, $\chi(G) \leq \lambda_1 + 1$, podemos expressar o $span(G)$ em função apenas do λ_1 , ou seja,

$$span(G) \leq \lambda_1. \quad (4.20)$$

O limite apresentado em (4.20) é melhor do que o apresentado em (4.19), pois $\lambda_1 - \lambda_n - 1 \geq \lambda_1$, uma vez que $-\lambda_n \geq 1$.

Observe que pelo Teorema 4.40, a relação encontrada na desigualdade (4.19) envolvendo o A - $spread$ e o $span$ pode ser estendida para o M - $spread$, ou seja,

$$span(G) \leq s_M(G) - 1. \quad (4.21)$$

Capítulo 5

Spread Laplaciano

Como vimos no capítulo anterior, o *spread* da matriz laplaciana coincide com o índice desta matriz, uma vez que $\mu_n = 0$. Assim,

$$s_L(G) = \mu_1(G).$$

Por esse motivo, *Fan et al.* [29] utilizaram o segundo menor autovalor laplaciano e definiram uma expressão similiar para substituir o *spread* da matriz laplaciana. Tal medida é comumente chamada na literatura por *spread laplaciano* e definida como a seguir:

$$\tilde{s}_L(G) = \mu_1(G) - \mu_{n-1}(G).$$

Observe que $\mu_{n-1} = 0$ se e somente se G é desconexo. Logo, para grafos desconexos, o *spread laplaciano*, o *spread da matriz laplaciana* e o *índice laplaciano* são iguais. Portanto, o interesse em estudar o *spread laplaciano* se reduz aos grafos conexos. Nas duas primeiras subseções, apresentamos alguns resultados já conhecidos para os invariantes conectividade algébrica e *spread laplaciano*. Nas demais subseções apresentamos os resultados e conjecturas que obtivemos no desenvolvimento deste trabalho.

5.1 Conectividade algébrica

Como sabemos, $L(G)$ é uma matriz semidefinida positiva e singular. Logo, o L-espectro de G tem os autovalores não negativos, sendo o menor deles necessariamente nulo. Desta forma, vamos organizá-los como

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1} \geq \mu_n = 0.$$

O segundo menor autovalor laplaciano μ_{n-1} é conhecido por conectividade algébrica e denotado por $a(G)$, ou seja, $a(G) = \mu_{n-1}$. *Fiedler* [30] mostrou que $a(G) = 0$ se e somente se G é desconexo. Isto o levou a acreditar que tal invariante está de alguma forma relacionado à conexidade do grafo.

Um resultado clássico na literatura relaciona os parâmetros de conectividade mais tradicionais, ou seja, a conectividade de aresta $e(G)$ e a de vértice $\kappa(G)$ com o grau mínimo $\delta(G)$, isto é, $\kappa(G) \leq e(G) \leq \delta(G)$. O próximo resultado nos diz que se G é não isomorfo a K_n , a conectividade algébrica é um limite inferior para a conectividade de vértices.

Proposição 5.1 [30] *Se G é um grafo com n vértices, não-isomorfo a K_n , então $a(G) \leq \kappa(G)$.*

A conectividade algébrica é conhecida para grafos de diversas classes, dentre elas, caminhos, ciclos, grafos completos, estrelas e grafos bipartidos completos.

Proposição 5.2 [30] *Seja G um grafo com n vértices com conectividade algébrica $a(G)$.*

1. *Se $G = P_n$ então $a(P_n) = 2(1 - \cos \frac{\pi}{n})$;*
2. *Se $G = C_n$ então $a(C_n) = 2(1 - \cos \frac{2\pi}{n})$;*
3. *Se $G = K_n$ então $a(K_n) = n$;*
4. *Se $G = S_{1,n-1}$ então $a(S_{1,n-1}) = 1$;*

5. Se $G = K_{p,q}$ então $a(K_{p,q}) = \min(p, q)$.

Merris, em [51], apresenta diversos resultados que relacionam o espectro de $L(G)$ com o de $A(G)$. Dentre eles, destacamos:

Proposição 5.3 [51] *Se G é conexo e k -regular então λ é autovalor de $A(G)$ se e somente se $k - \lambda$ é autovalor de $L(G)$.*

A proposição que segue mostra que a partir de um grafo G , qualquer grafo resultante de G pela retirada de uma ou mais arestas tem sua conectividade no máximo igual a de G .

Proposição 5.4 [30] *Se G_1 e G_2 são grafos com o mesmo número de vértices tal que G_1 é subgrafo de G_2 . Então $a(G_1) \leq a(G_2)$.*

A próxima proposição estabelece uma relação entre a conectividade algébrica e o número de independência de um grafo.

Proposição 5.5 *Seja G um grafo com n vértices e α seu número de independência. Tem-se que $a(G) \leq n - \alpha$.*

A proposição a seguir mostra um limite para a conectividade algébrica de grafos não-isomorfo a K_n .

Proposição 5.6 [30] *Se G é grafo com n vértices e não-isomorfo a K_n então $a(G) \leq n - 2$.*

Finalizamos, mostrando uma desigualdade entre a conectividade algébrica de um grafo e a de outro, deste obtido, pela remoção de alguns de seus vértices.

Proposição 5.7 [30] *Seja G_1 o grafo obtido de G pela remoção de k vértices. Então $a(G_1) \geq a(G) - k$.*

5.2 *Spread* laplaciano

Nessa subsecção, apresentamos alguns resultados da literatura relacionados ao *spread laplaciano*. Vamos definir a árvore $T(n, p)$, com $\frac{n-2}{2} \leq p \leq n-2$, da seguinte maneira: tome uma aresta e num dos vértices extremais insira p arestas pendentes e no outro vértice extremal insira $n-2-p$ arestas. Tal árvore é chamada de *estrela dupla*, conforme exibido na Figura 5.1.

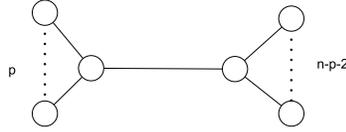


Figura 5.1: Estrela dupla $T(n, p)$.

Fan et al. [29] provaram inicialmente que se T é uma árvore com *spread laplaciano* máximo dentre todas as árvores de ordem n então T é uma estrela dupla $T(n, p)$, com $\frac{n-2}{2} \leq p \leq n-2$. Note que a estrela $S_{1, n-1}$ é um caso particular de estrela dupla com $p = n-2$, ou seja, $S_n = T(n, n-2)$. Depois disso, eles provaram que dentre as estrelas duplas, $S_{1, n-1}$ é a que maximiza o *spread laplaciano* com valor igual a $n-1$, ou seja,

$$\tilde{s}_L(T(n, p)) < \tilde{s}_L(T(n, n-2)) = \tilde{s}_L(S_{1, n-1}) = n-1.$$

Deste modo, a proposição dada a seguir, caracteriza o grafo com *spread laplaciano* máximo dentre todas as árvores de ordem n .

Proposição 5.8 [29] *Para $n \geq 5$, dentre todas as árvores de ordem n , $S_{1, n-1}$ é a única árvore que maximiza o *spread laplaciano*.*

No caso do *spread laplaciano* mínimo, *Fan et al.* [29] observaram inicialmente a relação entre o *spread laplaciano* de uma árvore T com o A -*spread* do seu grafo linha, denotando-o por T^L . Os autores mostraram que para qualquer árvore T de ordem $n > 3$, tem-se que $\tilde{s}_L(T) = s_A(T^L)$. No exemplo a seguir, exibimos na Figura 5.2 uma árvore T , seu grafo linha T^L e seus respectivos valores do *spread laplaciano*.

Exemplo 5.9 Observe que, $\tilde{s}_L(T) = \mu_1(T) - \mu_3(T) \cong 3,41 - 0,59 = 2,82$ e $s_A(T^L) = \lambda_1(T^L) - \lambda_3(T^L) \cong 1,41 - (-1,41) = 2,82$.



Figura 5.2: Árvore T e seu grafo linha T^L .

Usando o resultado apresentado na Proposição 4.19, o qual mostra que o caminho P_n é aquele que minimiza o A -spread, juntamente com a igualdade $\tilde{s}_L(T) = s_A(T^L)$, foi possível mostrar o seguinte resultado.

Proposição 5.10 [29] Para $n \geq 5$, dentre todas as árvores de ordem n , o caminho P_n é a única árvore que minimiza o spread laplaciano.

Dentre todos os grafos unicíclicos de ordem n , Bao et al. [6], em 2009, caracterizaram o único grafo unicíclico que maximiza o spread laplaciano, conforme a Proposição 5.11, dada a seguir:

Proposição 5.11 [6] Para $n \geq 4$, dentre todos os unicíclicos de ordem n , o grafo $G = \mathbf{S}_n^3$ da Figura 5.3, é o único grafo unicíclico que maximiza o spread laplaciano.

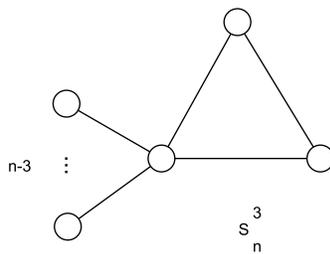


Figura 5.3: Grafo unicíclico que maximiza o spread laplaciano.

Note que, tal grafo pode ser facilmente obtido de um grafo estrela adicionando-se uma aresta entre quaisquer dois vértices pendentes da estrela. Além disso, podemos observar que é o mesmo grafo que maximiza o A -spread dentre os unicíclicos de ordem n , conforme o Teorema 4.18.

Em 2010, *You et al.* [65] provaram que o ciclo C_n é o único grafo unicíclico que minimiza o *spread laplaciano*, dentre todos os grafos unicíclicos de ordem n , conforme a Proposição 5.12, dada a seguir:

Proposição 5.12 [65] *Seja G um grafo unicíclico de ordem n . Então $\tilde{s}_L(G) \geq \tilde{s}_L(C_n)$ e a igualdade ocorre se e somente se $G \cong C_n$.*

Em 2010, *Fan et al.* [28] provaram que dentre todos os grafos bicíclicos de ordem n , existem exatamente dois deles que maximizam o *spread laplaciano* e, também, exibiram tais grafos.

Proposição 5.13 [28] *Para $n \geq 5$, se G é um grafo bicíclico de ordem n , os grafos B_1 e B_2 , da Figura 5.4, são os únicos bicíclicos que maximizam o *spread laplaciano* de G .*

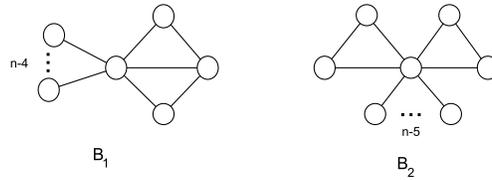


Figura 5.4: Grafos bicíclicos que maximizam o *spread laplaciano*.

Note que tais grafos podem ser facilmente obtidos da estrela S_n adicionando-se duas arestas incidentes entre si ou adicionando-se duas arestas não incidentes entre os vértices pendentes da estrela.

Em 2009, *Chen et al.* [13] provaram que dentre todos os tricíclicos de ordem n , existem exatamente cinco grafos tricíclicos que maximizam o *spread laplaciano*. Eles também exibiram tais grafos.

Proposição 5.14 [13] *Os grafos H_1, H_2, H_3, H_4 , e H_5 , dados na Figura 5.5, são os únicos grafos tricíclicos que maximizam o *spread laplaciano* dentre todos os grafos tricíclicos de ordem n .*

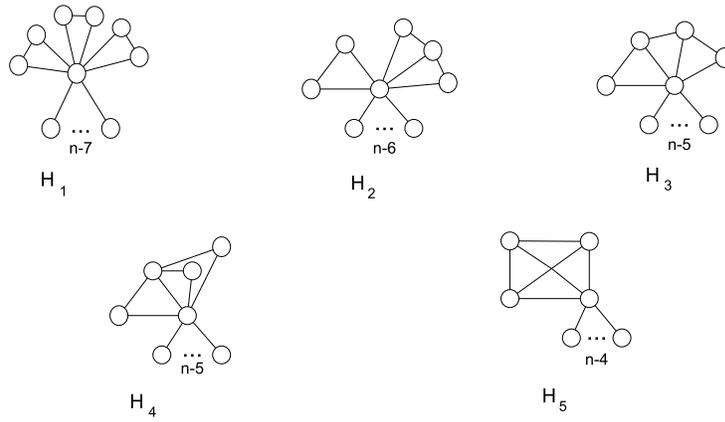


Figura 5.5: Grafos tricíclicos que maximizam o *spread laplaciano*.

Em 2011, *Zhai et al.* [66] provaram que em algumas classes de grafos, o *spread laplaciano* é limitado superiormente por $n - 1$. A seguir, apresentamos alguns desses resultados. Antes disso, apresentamos um resultado bastante interessante provado por eles que afirma que o *spread laplaciano* dos grafos G e \overline{G} são iguais.

Proposição 5.15 *Seja G um grafo com n vértices, então $\tilde{s}_L(G) = \tilde{s}_L(\overline{G})$.*

Prova: De fato, pela Proposição 2.12, temos $\mu_i(\overline{G}) = n - \mu_{n-i}(G)$, para $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Logo,

$$\mu_1(G) - \mu_{n-1}(G) = \mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) - n = n - [\mu_{n-1}(G) + \mu_{n-1}(\overline{G})] = \mu_1(\overline{G}) - \mu_{n-1}(\overline{G}).$$

■

As Proposições 5.16 e 5.17 mostram que para os grafos desconexos e em algumas classes de grafos conexos o *spread laplaciano* é no máximo $n - 1$.

Proposição 5.16 [66] *Se G é não conexo, então $\tilde{s}_L(G) \leq n - 1$.*

Proposição 5.17 [66] *Seja G um grafo conexo com $n \geq 5$ vértices e m arestas, tal que $n - 1 \leq m \leq n + 1$ então $\tilde{s}_L(G) \leq n - 1$.*

A partir das Proposições 5.16 e 5.17 acima, *Zhai et al.* [66] propuseram uma conjectura que amplia estes resultados no sentido que $n - 1$ passa a ser o limite

superior quando G é um grafo qualquer. Esta conjectura é formalmente apresentada e discutida na Seção 5.4.

Finalizamos esta seção apresentando duas contribuições do nosso trabalho envolvendo limites para o *spread laplaciano*. Na sequência, apresentamos uma relação entre o *spread laplaciano* de um grafo G com o *spread laplaciano* de um subgrafo induzido de G obtido pela retirada de k vértices de G .

Exemplo 5.18 *Sejam os grafos G , H e W da Figura 5.6*

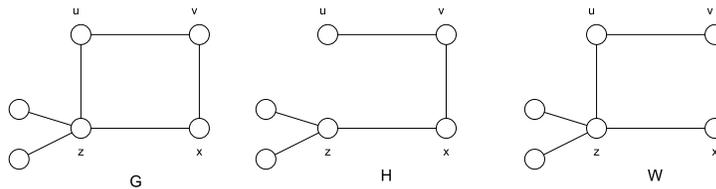


Figura 5.6: Grafo G e dois subgrafos H e W

Na Figura 5.6 temos $\tilde{s}_L(G) \approx 4,48$. Note que ao retirar a aresta $\{u, z\}$ do grafo G obtemos o grafo H da Figura 5.6 e $\tilde{s}_L(H) \approx 4,6$. No entanto, se retirarmos a aresta $\{v, x\}$ do grafo G , obtemos o grafo W da Figura 5.6 e $\tilde{s}_L(W) \approx 3,89$. Logo, observamos que ao retirarmos uma aresta do grafo de G , o *spread laplaciano* pode aumentar ou diminuir. Sendo assim, não podemos relacionar o *spread laplaciano* de um grafo G com o *spread laplaciano* de qualquer subgrafo de G .

Por outro lado, sabemos da Proposição 5.7, $a(H) \geq a(G) - k$, onde H é o grafo obtido de G pela remoção de k vértices. Deste modo, temos o seguinte resultado.

Proposição 5.19 *Seja G um grafo com n vértices e H um subgrafo induzido de G pela remoção de k vértices de G . Então,*

$$\tilde{s}_L(G) \geq \tilde{s}_L(H) - k.$$

Prova: Segue do Teorema 2.6, $\mu_1(G) \geq \mu_1(H)$. Por outro lado, segue da Proposição 5.7, $-a(G) \geq -a(H) - k$. Logo, o resultado segue. ■

Proposição 5.20 *Seja G um grafo com n vértices e $H = G - v$ o grafo obtido de G pela retirada de um vértice v . Então*

$$\tilde{s}_L(G) \geq \tilde{s}_L(H).$$

Prova: Sejam G um grafo com n vértices e v um vértice de G . Seja H o subgrafo de G obtido pela retirada do vértice v . Observe que $\tilde{s}_L(G) = \mu_1(G) - \mu_{n-1}(G)$ e $\tilde{s}_L(H) = \mu_1(H) - \mu_{n-2}(H)$. Do Teorema 2.6, $\mu_1(G) \geq \mu_1(H)$ e $\mu_{n-2}(H) \geq \mu_{n-1}(G)$. Logo, $\tilde{s}_L(G) \geq \tilde{s}_L(H)$. ■

5.3 O *spread* laplaciano de um grafo e o número cromático

Como vimos, no início deste capítulo o *spread laplaciano* é dado pela diferença entre o índice da matriz laplaciana e a conectividade algébrica de um grafo, como segue

$$\tilde{s}_L(G) = \mu_1(G) - \mu_{n-1}(G).$$

Do Teorema 4.40, temos $\chi(G) \leq M\text{-spread}$, para M sendo uma das matrizes que representam o grafo. Como $\mu_{n-1} \geq 0$, temos que $\tilde{s}_L(G) \leq s_L(G)$ com a igualdade verdadeira se, e somente se, G é desconexo. O fato anterior nos induz a pensar que o *spread laplaciano* poderia ser um limite melhor para o número cromático que os demais *spreads*. Entretanto, isto não é verdade, pois existem classes de grafos em que $\chi(G) > \tilde{s}_L(G)$. Sendo assim, um resultado similar aquele dado pelo Teorema 4.40 quando aplicado a $\tilde{s}_L(G)$ não se verifica para qualquer grafo. É o que acontece para a classe dos grafos completos, conforme vemos no lema a seguir.

Lema 5.21 Para todo grafo completo tem-se que $\chi(K_n) > \tilde{s}_L(K_n)$.

Prova: Sabemos que para colorir propriamente K_n precisamos de exatamente n cores, ou seja, $\chi(K_n) = n$. Por outro lado, das Proposições 4.21 e 5.2, o *spread laplaciano* de K_n é nulo. Então,

$$\chi(K_n) = n > 0 = \tilde{s}_L(K_n).$$

■

O lema a seguir dá um limite inferior para o *spread laplaciano*.

Lema 5.22 Se T uma árvore com n vértices, com $n \geq 3$, então $\tilde{s}_L(T) \geq \chi(T) = 2$.

Prova: De fato, *Fan et al* [29] mostraram que o *spread laplaciano* do caminho, $\tilde{s}_L(P_n) = 4\cos(\frac{\pi}{n})$ é o mínimo dentre aquelas das árvores de ordem n . Assim,

$$\chi(T) = 2 \leq 4\cos(\frac{\pi}{n}) = \tilde{s}_L(P_n) \leq \tilde{s}_L(T).$$

■

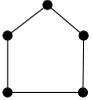
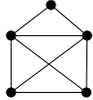
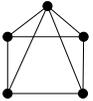
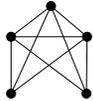
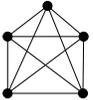
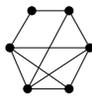
Os Lemas 5.21 e 5.22 exibem duas situações de desigualdades inversas, ou seja, enquanto para os grafos completos temos $\chi(K_n) > \tilde{s}_L(K_n)$, para as árvores vale o contrário, $\chi(T) \leq \tilde{s}_L(T)$. Note que estamos tratando com duas classes bem distintas, se considerarmos a densidade de arestas. Enquanto os grafos completos possuem o número máximo de arestas possíveis dentre todos os grafos de mesma ordem, as árvores possuem a quantidade mínima.

Nas subseções que seguem apresentamos algumas classes de grafos onde temos $\tilde{s}_L(G) \leq \chi(G)$, para todo G das classes consideradas, assim como apresentamos outras classes onde a desigualdade contrária é verdadeira.

5.3.1 Classes de grafos com $\tilde{s}_L(G) \leq \chi(G)$

O livro *An Atlas of Graphs* [60], apresenta todos os grafos com até 6 vértices. Observando todos os grafos lá encontrados, constatamos que existem 21 grafos conexos

em que $\chi(G) > \tilde{s}_L(G)$. Isto equivale aproximadamente 15% de todos os grafos com até 6 vértices. A Tabela 5.1, dada a seguir, exhibe os tais 21 grafos com os valores do índice laplaciano $\mu_1(G)$, da conectividade algébrica $a(G)$, do *spread laplaciano* $\tilde{s}_L(G)$ e do número cromático $\chi(G)$.

	μ_1	$a(G)$	$\tilde{s}_L(G)$	$\chi(G)$		μ_1	$a(G)$	$\tilde{s}_L(G)$	$\chi(G)$
(1) $n = 2; m = 1$ 	2	2	0	2	(2) $n = 3; m = 3$ 	3	3	0	3
(3) $n = 4; m = 5$ 	4	2	2	3	(4) $n = 4; m = 6$ 	4	4	0	4
(5) $n = 5; m = 5$ 	3,61	1,38	2,23	3	(6) $n = 5; m = 8$ 	5	2	3	4
(7) $n = 5; m = 8$ 	5	3	2	3	(8) $n = 5; m = 9$ 	5	3	2	4
(9) $n = 5; m = 10$ 	5	5	0	5	(10) $n = 6; m = 10$ 	5,67	1,78	3,88	4
(11) $n = 6; m = 10$ 	6	2,38	3,61	4	(12) $n = 6; m = 11$ 	6	2,38	3,61	4
(13) $n = 6; m = 11$ 	6	3	3	4	(14) $n = 6; m = 12$ 	6	2	4	5

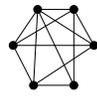
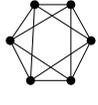
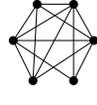
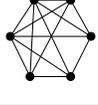
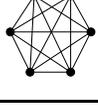
	μ_1	$a(G)$	$\tilde{s}(G)$	$\chi(G)$		μ_1	$a(G)$	$\tilde{s}(G)$	$\chi(G)$
(15) $n = 6; m = 12$ 	6	3	3	4	(16) $n = 6; m = 12$ 	6	3	3	4
(17) $n = 6; m = 12$ 	6	4	2	3	(18) $n = 6; m = 13$ 	6	3	3	5
(19) $n = 6; m = 13$ 	6	4	2	4	(20) $n = 6; m = 14$ 	6	4	2	5
(21) $n = 6; m = 15$ 	6	6	0	6					

Tabela 5.1: Grafos com $n \leq 6$ tais que $\chi(G) > \tilde{s}_L(G)$.

Ao analisarmos a Tabela 5.1, constatamos de fato que os grafos que compartilham deste cenário, à exceção do grafo C_5 , são todos grafos densos, muito mais próximos dos grafos completos do que das árvores. Pretendemos então investigar propriedades dos grafos que participam do cenário decorrente da Tabela 5.1, ou seja, grafos para os quais a desigualdade $\chi(G) > \tilde{s}_L(G)$ é verdadeira. De fato, a conectividade algébrica influencia em muito neste resultado que expressa exatamente ordem inversa daquela dada pelo Teorema 4.40. Isto é natural pois o *spread laplaciano* é dado pela diferença entre o *spread* de $L(G)$ e a conectividade algébrica,

$$\tilde{s}_L(G) = s_L(G) - \mu_{n-1},$$

que, no caso dos grafos conexos, sendo $\mu_{n-1} > 0$ implica em se ter $\tilde{s}_L(G) < s_L(G)$. Para que tenhamos uma desigualdade similar àquela apresentada no Teorema 4.40,

será preciso verificar qual o valor máximo da conectividade algébrica a ser subtraída do índice laplaciano do grafo para que a desigualdade $\chi(G) \leq \tilde{s}_L(G)$ continue verdadeira. No caso dos grafos completos, μ_1 e μ_{n-1} atingem valores maximais e iguais a n , pois $\mu_1 = \mu_{n-1} = n$, acarretando $\tilde{s}_L(G) = 0$. Como se comportam estes dois parâmetros num grafo com muitas arestas, ou seja, intuitivamente falando, um grafo que esteja nas proximidades do grafo completo? Sabemos que $\mu_1 = n$ se e somente se \bar{G} é desconexo. Por exemplo, grafos com algum vértice de grau máximo e igual a $n - 1$ tem esta propriedade. É bom que se diga que isto não é uma condição necessária, tanto que os grafos (13), (14) e (17) da Tabela 5.1 não possuem vértices de grau $n - 1$, mas possuem valores máximos para $\mu_1(G)$. Na verdade, dentre os grafos da Tabela 5.1, somente dois casos não apresentam o valor máximo para μ_1 , estes são o ciclo (5) e o grafo (10). Por outro lado, há somente 5 grafos naquela tabela que possuem $\Delta(G) < n - 1$. São eles, os grafos (5), (10), (13), (14) e (17). Portanto, quase todos os grafos com até 6 vértices tais que a desigualdade $\chi(G) > \tilde{s}_L(G)$ é verdadeira possuem pelo menos uma estrela como subgrafo gerador. Este fato poderá ser observado na Proposição 5.29.

A partir das observações acima, conseguimos definir uma família de grafos de qualquer ordem, tais que seu número cromático é estritamente maior que o *spread laplaciano*.

Para um dado k , $1 \leq k \leq n - 2$, seja G_k o grafo resultante da remoção de k arestas incidentes a um mesmo vértice do grafo completo K_n . Nestas condições G_k é conexo.

Lema 5.23 *Para todo grafo G_k como acima definido, tem-se $\chi(G_k) = n - 1$.*

Prova: Veja que $\chi(G_1) = n - 1$. Além disso, observe que o grafo resultante após a retirada de $k = n - 2$ arestas de um mesmo vértice é composto por uma clique de tamanho igual a $n - 1$ ligada por uma aresta pendente a este vértice. Portanto, $\chi(K_n - \{e_1, e_2, \dots, e_{n-2}\}) = n - 1$. ■

O próximo lema caracteriza o espectro de G_k .

Lema 5.24 Para k , $1 \leq k \leq n - 2$, o espectro laplaciano do grafo G_k é dado por:

$$\text{spect}(L(G_k)) = \begin{pmatrix} n & n-1 & n-k-1 & 0 \\ n-k-1 & k-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prova:

Sem perda de generalidades, podemos supor que as arestas retiradas são $e_i = v_1v_{i+1}$, $1 \leq i \leq k$ e que a matriz laplaciana L do grafo G_k pode ser representada por

$$L(G_k) = \begin{pmatrix} n-(k+1) & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 0 & n-2 & -1 & \dots & -1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ \vdots & -1 & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -1 & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & -1 & n-2 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & \dots & -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & \dots & -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix}.$$

Note que $\det(L(G_k) - (n-1)I) = 0$, logo $n-1$ é autovalor com multiplicidade algébrica de pelo menos $k-1$. De fato, considere $v = e_i - e_2$, com $3 \leq i \leq k+1$. Logo, a multiplicidade do autovalor $n-1$ é igual a $(k+1) - 3 + 1 = k-1$, e portanto, $L(G_k)v = (n-1)v$. Aplicando o processo de redução à matriz $L(G_k)$, seguem que os autovalores da matriz

$$M = \begin{pmatrix} n-k-1 & 0 & -n+k+1 \\ 0 & n-k-1 & -n+k+1 \\ -1 & -k & k+1 \end{pmatrix},$$

são também autovalores de $L(G_k)$. O polinômio característico de M pode ser expresso por

$$p_M(\lambda) = \lambda(\lambda - n)(\lambda + k - n + 1).$$

Daí, segue que os n , $n - k - 1$ e 0 são autovalores de $L(G_k)$. O autovalor n tem multiplicidade algébrica de no mínimo $(n - k - 1)$. Para ver isto, considere e_i o i -ésimo vetor da base canônica. Seja $v = e_i - \frac{1}{k+1}(e_1 + \dots + e_{k+1})$ com $k + 2 \leq i \leq n$. Logo, $L(G_k).v = n.v$, e portanto, n é autovalor de $L(G_k)$ com multiplicidade $n - (k+2) + 1 = n - k - 1$. O autovalor 0 tem multiplicidade algébrica igual a 1 . Basta tomar $v = (1, 1, \dots, 1)$, e assim teremos $L(G_k).v = 0.v$. O autovalor $(n - k - 1)$ tem multiplicidade algébrica igual a 1 . Basta tomar $v = e_2 + \dots + e_{k+1} - ke_1$. Logo, $L(G_k).v = (n - k - 1).v$. ■

O espectro laplaciano do grafo G_k pode ser obtido de outra maneira, utilizando-se a Proposição 2.12, obtendo-se os autovalores de $L(\overline{G})$ por meio dos autovalores de $L(G)$. Observe que o complementar do grafo G_k pode ser expresso da seguinte forma, $\overline{G_k} = K_{1,k} \cup \overline{K}_{n-k-1}$. Logo, seu espectro é dado por

$$\text{spect}(\overline{G_k}) = \begin{bmatrix} k+1 & 1 & 0 \\ 1 & k-1 & n-k-1 \end{bmatrix}.$$

Segue da Proposição 2.12 que os L-autovalores de G_k são dados por

$$\text{spect}(G_k) = \begin{bmatrix} n & n-1 & n-k-1 & 0 \\ n-k-1 & k-1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O Teorema 5.25 nos indica até quantas arestas incidentes a um mesmo vértice podemos retirar do grafo completo de modo que tenhamos $\chi(G_k) \geq \tilde{s}_L(G_k)$.

Teorema 5.25 *Se $k \leq n - 2$ o grafo G_k é tal que $\chi(G_k) > \tilde{s}_L(G_k)$, com a igualdade satisfeita na desigualdade se e somente se G_k é o grafo completo K_{n-1} com uma aresta pendente.*

Prova: Do Lema 5.23, segue que $\chi(G_k) = n - 1$. Do Lema 5.24, tem-se que o índice de G_k é n e a conectividade algébrica é $n - k - 1$. Logo, $\tilde{s}_L(G_k) = k + 1$ e, portanto, o resultado segue. ■

Seja $SC(n, k)$ o grafo *split completo*. O próximo resultado exhibe uma condição

para que tenhamos o $\chi(SC(n, k)) > \tilde{s}_L(SC(n, k))$. É fácil ver que o número cromático do grafo *split completo* é igual a $k + 1$. Como o grafo *split completo* pode ser escrito como o join dos grafos $G_1 = K_k$ e $G_2 = \overline{K}_{n-k}$, temos $G \cong SC(n, k) = K_k \vee \overline{K}_{n-k}$. Da Proposição 4.24 segue que o espectro desse grafo é dado por:

$$\text{spect}(K_k \vee \overline{K}_{n-k}) = \{0, \mu_{k-1}(K_k) + (n-k), \dots, \mu_1(K_k) + (n-k), \mu_{(n-k)-1}(\overline{K}_{n-k}) + k, \dots, \mu_1(\overline{K}_{n-k}) + k, n\}.$$

No entanto, este resultado também poderia ser determinado como apresentamos no Lema 5.26.

Lema 5.26 *O espectro laplaciano do grafo $SC(n, k)$ é*

$$\text{spect}(L(SC(n, k))) = \begin{pmatrix} n & k & 0 \\ k & n-k-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prova: Sem perda de generalidade, podemos rotular os vértices do grafo *split completo* da seguinte forma. Rotulamos os vértices da clique de 1 até k e os demais vértices do conjunto independente de $k+1$ até n . Desta forma, a matriz laplaciana L do grafo $SC(n, k)$ pode ser representada por

$$L(SC(n, k)) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & n-1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Note que $\det(L(SC(n, k)) - (k)I) = 0$, logo k é autovalor com multiplicidade algébrica de no mínimo $n-k-1$. De fato, basta tomar $v = e_i - e_{k+1}$, com $k+2 \leq i \leq n$. Logo, a multiplicidade do autovalor k é igual a $n-(k+2)+1 = n-k-1$, e portanto, $L(SC(n, k)).v = kv$. Aplicando o processo de redução à matriz $L(SC(n, k))$, seguem

que os autovalores da matriz

$$M = \begin{pmatrix} n - k & k - n \\ -k & k \end{pmatrix},$$

são também autovalores de $L(SC(n, k))$. O polinômio característico de M pode ser expresso por

$$p_M(\lambda) = \lambda(\lambda - n).$$

Daí, segue que n e 0 são autovalores de $L(SC(n, k))$. O autovalor n tem multiplicidade algébrica de no mínimo k . De fato, considere e_i o i -ésimo vetor da base canônica. Seja $v = (k - n)e_1 + e_{k+1} + \dots + e_n$ ou $v = -e_1 + e_i$, com $2 \leq i \leq k$, $k \geq 2$. Logo, $L(SC(n, k)).v = n.v$, e portanto, n é autovalor de $L(SC(n, k))$ com multiplicidade $k - (2) + (2) = k$. O autovalor 0 tem multiplicidade algébrica igual a 1 . Basta tomar $v = (1, 1, \dots, 1)$, para se ter $L(SC(n, k)).v = 0.v$. ■

Teorema 5.27 *Seja $G \cong SC(n, k)$. Então $\chi(G) \geq \tilde{s}_L(G) \Leftrightarrow k \geq \frac{n-1}{2}$.*

Prova: Como $G \cong SC(n, k)$, é fácil ver que $\chi(SC(n, k)) = k + 1$. Do Lema 5.26, $\mu_1 = n$ e $\mu_{n-1} = k$. Logo, $\tilde{s}_L(SC(n, k)) = n - k$. Por hipótese,

$$k \geq \frac{n-1}{2} \Leftrightarrow k + k \geq n - 1 \Leftrightarrow k + 1 \geq n - k,$$

e o resultado segue. ■

Como exemplo, exibimos os grafos na classe $SC(6, k)$ para os quais $\chi(SC(6, k)) > \tilde{s}_L(SC(6, k))$. Pelo Teorema 5.27 vemos que $k > \frac{5}{2}$.

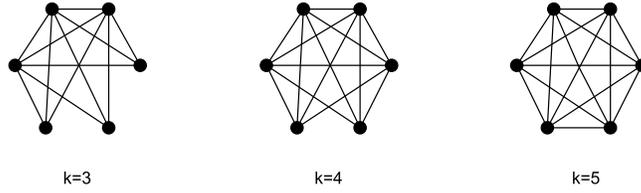


Figura 5.7: Grafos $SC(6, k)$ para os quais $\chi(SC(6, k)) > \tilde{s}_L(SC(6, k))$.

Proposição 5.28 *Seja $G \neq K_n$ um grafo com n vértices com $\Delta(G) = n - 1$. Seja H um grafo obtido de G pela inclusão de pelo menos uma aresta. Tem-se então que $\tilde{s}_L(G) \geq \tilde{s}_L(H)$.*

Prova: Da hipótese, temos $\Delta(G) = n - 1$ e pela definição de H , $\Delta(H) = n - 1$. Da Proposição 4.21, segue que $\mu_1(G) = \mu_1(H) = n$. Deste modo, a variação ocorrida no *spread laplaciano* para os grafos G e H é somente ocasionada pelo valor da conectividade algébrica dos grafos em questão. Os grafos G e H tem a mesma quantidade de vértices e $G \subseteq H$. Do Corolário 5.4, $a(G) \leq a(H)$. Portanto, o resultado segue. ■

Proposição 5.29 *Seja G um grafo com n vértices e com no mínimo $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vértices de grau $n - 1$, então $\chi(G) \geq \tilde{s}_L(G)$.*

Prova: A prova será dividida em dois casos: no primeiro caso, seja G um grafo com exatamente $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vértices de grau $n - 1$. Então, ou G é isomorfo ao grafo split completo com uma clique de tamanho $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, ou seja, $G \cong SC(n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$, ou G é obtido do grafo $SC(n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ adicionando-se pelo menos uma aresta. Seja $G \cong SC(n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$. Se n é par, temos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$. Logo, do Teorema 5.27 o resultado segue, pois $\frac{n}{2} > \frac{n-1}{2}$. Para n ímpar, temos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$. Se tomarmos $k = \frac{n-1}{2}$ no Teorema 5.27, obtemos $\chi(SC(n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)) = \tilde{s}_L(SC(n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor))$. Logo, $\chi(SC(n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)) \geq \tilde{s}_L(SC(n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor))$. Seja H o grafo obtido do grafo $SC(n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ adicionando-se pelo menos uma aresta. Da Proposição 5.28, $\tilde{s}_L(SC(n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)) \geq \tilde{s}_L(H)$, e, portanto, $\chi(SC(n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)) \geq \tilde{s}_L(SC(n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)) \geq \tilde{s}_L(H)$. No segundo caso, seja G um grafo cujo

número de vértices de grau $n - 1$ é superior ao $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. É fácil ver $SC(n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \subseteq H$, logo, novamente pelo uso da Proposição 5.28 o resultado segue.

■

5.3.2 Classes de grafos com $\tilde{s}_L(G) \geq \chi(G)$

Nesta subseção apresentamos algumas classes de grafos onde temos $\tilde{s}_L(G) \geq \chi(G)$. Considere a família de grafos $H_{n,k}$ definida na Subseção 2.3. Segue diretamente da construção do grafo $H_{n,k}$ que seu número cromático é constante e igual a 3. O lema a seguir, apresenta o espectro da matriz laplaciana do grafo $H_{n,k}$.

Lema 5.30 *O espectro do grafo $H_{n,k}$ em relação a matriz laplaciana é dado por:*

$$\text{spect}(H_{n,k}) = \begin{pmatrix} n & k+3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & n-k-3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prova: A matriz laplaciana L do grafo $H_{n,k}$ pode ser representada por

$$L(H_{n,k}) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & \dots & \dots & -1 & \dots & \dots & \dots & -1 \\ -1 & k+2 & -1 & \dots & \dots & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \ddots & & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para cada $i = 1, \dots, n$, seja e_i o i -ésimo vetor da base canônica. Para $4 \leq i \leq k+3$, o vetor $v = -e_3 + e_i$ é uma autovetor da matriz $L(H_{n,k})$ associado ao autovalor 2 com multiplicidade algébrica de no mínimo k , enquanto que para cada $i = k+5, \dots, n$, o vetor $v = e_i - \frac{1}{k+2}(e_2 + \dots + e_{k+3})$ é uma autovetor da

matriz $L(H_{n,k})$ associado ao autovalor 1 com multiplicidade algébrica de no mínimo $n - k - 4$. Como $L(H_{n,k})$ possui uma base ortogonal constituída por autovetores, segue-se que existem autovetores da forma $(\alpha \ \beta \ \gamma \mathbf{1} \ \theta \mathbf{1})^T$. Então, os autovalores da matriz

$$M = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -k-1 & k+3-n \\ -1 & k+2 & -k-1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

são também autovalores de $L(H_{n,k})$. O polinômio característico de M pode ser expresso por

$$p_M(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(n - \lambda)(k - \lambda + 3).$$

Logo, n , $k + 3$, 1 e 0 são autovalores de $L(H_{n,k})$ e, portanto, o resultado segue. ■

Teorema 5.31 *Para $n \geq 5$, seja $G \cong H_{n,k}$. Então, $\tilde{s}_L(G) \geq \chi(G)$.*

Prova:

Do Lema 5.30, seque que $\mu_1(H_{n,k}) = n$. No entanto, o valor da conectividade algébrica $a(H_{n,k})$ pode assumir dois valores. Para $0 \leq k \leq n - 4$, temos $a(H_{n,k}) = 1$, enquanto que para $k = n - 3$ temos $a(H_{n,n-3}) = 2$. Assim,

$$\tilde{s}_L(H_{n,k}) = \begin{cases} n-1, & 0 \leq k \leq n-4 \\ n-2, & k = n-3. \end{cases}$$

Por outro lado, segue da construção do grafo $H_{n,k}$ que $\chi(H_{n,k}) = 3$. Logo, o resultado segue. ■

Se $k = n - 3$, o grafo $H_{n,k}$ possui o número máximo de arestas. Neste caso, o grafo $H_{n,n-3}$ é conhecido por grafo *book*. Um *grafo book*, denotado por B_p , consiste de p triângulos que compartilham de uma aresta em comum. É fácil ver que $\chi(B_p) = 3$

e pelo valor do *spread* do grafo $H_{n,k}$, segue que $\tilde{s}_L(B_p) = n - 2$. Logo, somente para $n = 5$, obtemos a igualdade $\chi(B_p) = \tilde{s}_L(B_p)$, nos demais casos a desigualdade é estrita.

Na sequência, vamos exibir uma classe de grafos que obtemos a partir do grafo *book*, onde sempre teremos a igualdade entre o número cromático e o *spread laplaciano*. Seja G_c o grafo obtido do grafo B_p adicionando $\frac{(n-4)(n-5)}{2}$ arestas entre $n - 4$ vértices de modo que G_c possua uma clique de tamanho $n - 2$ e dois vértices de grau 2. A Figura 5.8, exibe os grafos G_c para $n = 6$ e $n = 7$.

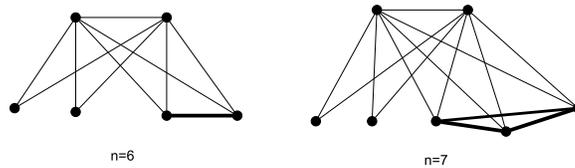


Figura 5.8: Grafos G_c para $n = 6$ e $n = 7$.

Corolário 5.32 *Seja G_c um grafo com n vértices. Então, $\tilde{s}_L(G_c) = \tilde{s}_L(B_p) = n - 2$.*

Prova: Segue do valor do *spread* do grafo $H_{n,k}$ que $\tilde{s}_L(B_p) = n - 2$. Da Proposição 5.28 segue que $\tilde{s}_L(B_p) \geq \tilde{s}_L(G_c)$. Logo, $n - 2 \geq n - a(G_c) \Rightarrow a(G_c) \geq 2$. Por outro lado, temos que $a(G_c) \leq \delta(G_c) = 2$. Logo, o resultado segue. ■

Vimos pelo Corolário 5.32 que o acréscimo de $\frac{(n-4)(n-5)}{2}$ arestas no grafo B_p , conforme definimos, não altera o valor do *spread laplaciano*, ou seja, o *spread laplaciano* é constante e igual a $n - 2$. O próximo resultado nos diz que quando obtemos o grafo G_c , tem-se a igualdade entre o *spread laplaciano* e o número cromático.

Proposição 5.33 *Se G_c é um grafo com n vértices como definido acima, então $\tilde{s}_L(G_c) = \chi(G_c)$.*

Prova: Pelo Corolário 5.32 temos $\tilde{s}_L(G_c) = n - 2$. Resta provar que $\chi(G_c) = n - 2$. A sequência de graus do grafo B_p é dada por $(n - 1, n - 1, 2, \dots, 2)$. Note que ao adicionarmos as $\frac{(n-4)(n-5)}{2}$ arestas aos $(n - 4)$ vértices, formamos uma clique de tamanho de tamanho $n - 4$. Seja v_i um dos vértices de grau 2 onde adicionamos

as arestas. É fácil ver que $d(v_i) = 2 + (n - 5) = n - 3$. Logo, temos $n - 4$ vértices com grau $n - 3$. Observe ainda que, estes vértices de grau $n - 3$ estão ligados a dois vértice de grau $n - 1$. Logo, temos $(n - 2)$ vértices com grau maior ou igual a $n - 3$. Logo o grafo G_c é composto por uma clique de tamanho $(n - 2)$ e dois vértices de grau dois, e portanto $\chi(G_c) = n - 2$. ■

5.4 Conjecturas sobre o *spread laplaciano*

Nessa subseção, o nosso interesse é rever uma já conhecida conjectura proposta em 2011, por *Zhai et al.* [66], envolvendo o *spread laplaciano* de um grafo. Em seguida apresentamos provas da validade da Conjectura de *Zhai et al.* em grafos de classes especiais, como os *thresholds* e grafos com conectividade algébrica superior ou igual a 1. Terminamos a subseção com propostas de novas conjecturas sobre o *spread laplaciano*.

Conjectura 5.34 [66] *Seja G um grafo com n vértices. Então, $\tilde{s}_L(G) \leq n - 1$. A igualdade vale se e somente se um dos grafos G ou \bar{G} é isomorfo a $K_1 \vee H$, sendo H um grafo desconexo qualquer com $(n - 1)$ vértices.*

Usando a relação $\mu_1(\bar{G}) = n - \mu_{n-1}(G)$, observamos que provar a Conjectura de *Zhai et al.* é equivalente a mostrar que

$$\mu_1(\bar{G}) + \mu_1(G) \leq 2n - 1,$$

ou ainda,

$$a(\bar{G}) + a(G) \geq 1.$$

A determinação de desigualdades envolvendo $i(G) + i(\bar{G})$, onde $i(G)$ é um invariante de G , é conhecida como problema de *Nordhauss-Gaddum*. Há inúmeros artigos na literatura envolvendo problemas deste tipo, [5].

Zhai et al. [66], provaram que para grafos conexos com $n \geq 5$ vértices e com número m de arestas variando no intervalo de $n - 1$ a $n + 1$, a conjectura é válida, ou

seja, é válida para as árvores, unicíclicos e bicíclicos. Também provaram a validade da conjectura para qualquer grafo desconexo. Além disso, *Chen e Wang*, em [13], exibiram os grafos tricíclicos com máximo *spread laplaciano*, vide Proposição 5.14, e provaram que para tais grafos $\tilde{s}_L(G) = n - 1$. Como estes são maximais em relação ao *spread laplaciano*, segue que, se G é tricíclico, ou seja, se $m = n + 2$, tem-se $\tilde{s}_L(G) \leq n - 1$.

É fácil ver que tal conjectura também é verdadeira para os grafos *split completo* $SC(n, k)$, para os grafos $H_{n,k}$, para os grafos G_k , e para os grafos bipartidos completos. A Proposição 5.35, que é uma outra contribuição desta tese mostra que a Conjectura 5.34 é válida também para os grafos *thresholds*. Como os grafos *split completo* $SC(n, k)$, $H_{n,k}$ e G_k são livres de P_4 , C_4 e $2K_2$, então tais grafos são todos *thresholds* e assim, a nossa proposição generaliza os resultados anteriormente mencionados.

Proposição 5.35 *Se G é um grafo threshold com n vértices, então $\tilde{s}_L(G) \leq n - 1$.*

Prova: Seja G conexo. Da Proposição 4.26 e da definição de grafos *thresholds* seguem que, $\mu_1 = n$ e $\mu_{n-1} \geq 1$. Logo, $\tilde{s}_L(G) \leq n - 1$. Caso contrário, usando novamente a definição dos grafos *thresholds*, segue que G tem uma componente conexa com um vértice universal e vértices isolados. Assim, $\mu_1 = n - k$, onde k é o número de vértices isolados de G e $\mu_{n-1} = 0$. Logo, $\tilde{s}_L(G) = n - k \leq n - 1$, pois $k \geq 1$. ■

Outro resultado interessante e que estende a classe de grafos onde a conjectura se verifica foi obtido por *Zhai et al.* [66], quando eles provaram

$$\tilde{s}_L(G) = \tilde{s}_L(\overline{G}).$$

Por conta do que foi dito, parece promissor a busca de uma prova formal para o caso geral da conjectura de *Zhai et al.*. Seguindo esta linha de investigação, chegamos ao seguinte e importante resultado que nos diz que, para todo grafo com $a(G) \geq 1$, a conjectura de *Zhai et al.* é verdadeira.

Proposição 5.36 *Se G é um grafo com n vértices e $a(G) \geq 1$, então $\tilde{s}_L(G) \leq n-1$.*

Prova: Suponha que $\tilde{s}_L(G) > n-1$. Como $\tilde{s}_L(G) = \mu_1(G) - a(G)$, tem-se $\mu_1(G) - a(G) > n-1$. Daí, $\mu_1(G) - n > a(G) - 1$. Sendo, $a(G) \geq 1$, segue que $a(G) - 1 \geq 0$. Logo, temos

$$\mu_1(G) - n > a(G) - 1 \geq 0 \Rightarrow \mu_1(G) > n,$$

o que contraria o fato de que $\mu_1(G) \leq n$ para qualquer grafo G . ■

A partir daí, a conjectura de *Zhai et al.* permanece em aberto somente para alguns casos em que G é um grafo com $a(G) < 1$. Dizemos alguns casos pois sabemos que se T é uma árvore, $a(T) \leq 1$, e para este caso, a conjectura já foi provada. Na realidade, a prova da conjectura de *Zhai et al.* poderá ser fortalecida se mostrarmos que a mesma vale para grafos com vértices pendentos, uma vez que, nestes casos, $a(G) \leq \delta(G)$ e que $\delta(G) = 1$. Entretanto, isto não provaria a conjectura completa, pois existem grafos com $a(G) < 1$ e $\delta(G) \geq 2$. A quantidade de grafos com esta propriedade parece ser pequena, pois fizemos uma busca nos grafos de ordem $n = 4$ a $n = 6$ e encontramos somente três grafos com tal propriedade. A Figura 5.9 exhibe os grafos encontrados com os valores de suas respectivas conectividades algébricas.

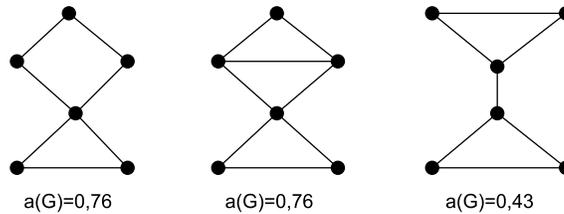


Figura 5.9: Únicos grafos com até 6 vértices, grau mínimo 2 e conectividade algébrica inferior a 1.

Já vimos que no caso geral, o número cromático não é um limite inferior para o *spread laplaciano*. Desta forma, procuramos uma desigualdade que relacione o número cromático com o *spread laplaciano*. Para isso, definimos a função $F = \frac{n-1}{2} - \frac{\tilde{s}_L(G)}{\chi}$, com o auxílio da ferramenta computacional AGX, [11], minimizamos a função F para $5 \leq n \leq 12$ vértices e obtivemos uma relação entre os dois invariantes

que apresentamos na conjectura a seguir.

Conjectura 5.37 *Seja G um grafo conexo com n vértices, então*

$$\tilde{s}_L(G) \leq \frac{n-1}{2} \chi(G).$$

É fácil ver que, para $\chi(G) = 2$ quando os grafos são bipartidos, esta se reduz a Conjectura de *Zhai et al.*

Outra conjectura que pudemos obter, com o auxílio do AGX, estabelece uma relação entre o *spread laplaciano* e o *spread* de um grafo com relação à matriz de adjacência. Definimos a função $F = \frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{\tilde{s}_L(G)}{s_A(G)}$, e minimizamos F para $5 \leq n \leq 14$ vértices, e assim obtivemos a conjectura a seguir.

Conjectura 5.38 *Para todo grafo conexo G com n vértices, a relação que segue é verdadeira*

$$\frac{\tilde{s}_L(G)}{s_A(G)} < \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Os testes feitos também nos permitiram determinar os grafos extremais que satisfazem a desigualdade dada acima. Para $5 \leq n \leq 8$ estes são isomorfos a S_n . Para os demais casos, ou seja, para $9 \leq n \leq 14$, os grafos extremais apresentam a estrutura da árvore dada na Figura 5.10.

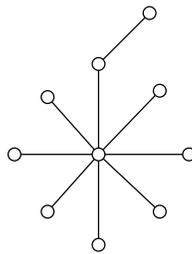


Figura 5.10: Grafo extremal com $n = 9$ vértices.

Capítulo 6

Considerações Finais

Nesta tese obtivemos alguns resultados que relacionam o *spread* de um grafo com o seu número cromático. Encerramos esta tese destacando nesta seção as nossas principais contribuições em cada capítulo e apontando as possíveis linhas de pesquisas futuras.

Na Seção 4.3, as nossas contribuições iniciais se encontram nas Proposições 4.38 e 4.39. A seguir, apresentamos no Teorema 4.40, a nossa principal contribuição do capítulo pois este teorema generaliza os resultados parciais que já havíamos anteriormente provado e publicado em [57]. O teorema mencionado prova que o número cromático de um grafo qualquer é limitado superiormente pelo *spread* de qualquer uma das matrizes de adjacência, laplaciana e laplaciana sem sinal, que definem o grafo. Além disso, provamos que o limite inferior do *spread* é atingido somente no caso do grafo completo K_n . Nas Proposições 4.41 e 4.42 provamos que para qualquer grafo bipartido ou para qualquer grafo regular, o *spread* da matriz de adjacência é um melhor limite superior para o número cromático que os demais *spreads*. Finalizamos as contribuições deste capítulo apresentando um limite superior para o problema de *span*. Tal limite decorre do resultado que obtivemos no Teorema 4.40, quando aplicado à matriz de adjacência.

As Proposições 5.19 e 5.20, relacionam o *spread laplaciano* dos grafos G e H . No primeiro resultado, H é um subgrafo induzido de G , após a retirada de k vértices; e, no segundo resultado, H é obtido de G pela retirada de um vértice v . Na Seção

5.3, vimos que, em geral, o número cromático não é um limite inferior para o *spread laplaciano*, ou seja, o *spread laplaciano* para certos grafos contraria o resultado apresentado no Teorema 4.40. Nesta seção apresentamos algumas classes de grafos nas quais é válido a desigualdade, $\chi(G) \geq \tilde{s}_L(G)$. Na Proposição 5.29, apresentamos uma condição mais geral para se ter $\chi(G) \geq \tilde{s}_L(G)$ que envolve a cardinalidade de vértices com grau do grafo a $n - 1$. O Teorema 5.31 prova que, para a classe de grafos $H_{n,k}$, a desigualdade $\tilde{s}_L(G) \geq \chi(G)$ é válida e na Proposição 5.33, exibimos uma classe de grafos onde temos $\tilde{s}_L(G) = \chi(G)$.

Na Seção 5.4, apresentamos alguns avanços em relação à prova da Conjectura 5.34. A Proposição 5.35 reforça esta conjectura, pois nela provamos que os grafos *thresholds* a satisfazem. Além disso, na Proposição 5.36, mostramos que para os grafos com $a(G) \geq 1$, a conjectura também é válida. O caso em que $a(G) < 1$ permanece em aberto. Finalizando as contribuições deste capítulo, propusemos duas conjecturas: a primeira envolve o *spread laplaciano*, o número cromático e a ordem do grafo. Mostramos que tal conjectura é válida para as árvores. A segunda conjectura proposta relaciona o *spread laplaciano* com o *spread* da matriz de adjacência de um grafo qualquer. Para sugestão de ambas conjecturas, uma busca computacional foi efetuada em uma vasta base de grafos sem que, encontrássemos qualquer caso que as refutassem. Estes experimentos foram feitos com o auxílio do software AGX [11].

Com relação aos assuntos abordados, podemos sugerir as seguintes propostas para serem desenvolvidas como trabalhos futuros:

- O limite apresentado em (4.19) é válido para grafos não valorados. No entanto, os Problemas de Atribuição de Frequências geralmente abordam grafos cujas arestas são valoradas com números reais (em geral positivos). Neste sentido, torna-se interessante pesquisar se a tal limite continua válido nestes casos.

- Verificamos através da Proposição 5.36, que os grafos com conectividade algébrica maior ou igual 1 satisfazem a Conjectura 5.34. Tal conjectura é também satisfeita pelas árvores. Deste modo, torna-se interessante investigar se para os grafos com $a(G) < 1$ que não são árvores, se a conjectura continua verdadeira. Se isto ocorrer, a prova da Conjectura se completa.
- Provamos que, em geral, $\tilde{s}_L(G)$ não é um limite superior para $\chi(G)$. Provamos casos em que vale exatamente o contrário, ou seja, $\chi(G) \geq \tilde{s}_L(G)$. Seria interessante investigar sob que condições um dado grafo G deve ser realizado para que se tenha $\chi(G) \leq \tilde{s}_L(G)$.

Referências Bibliográficas

- [1] ABREU, N. M. M., 2005, “Teoria Espectral de Grafos: um Híbrido entre a Álgebra Linear e a Matemática Discreta e Combinatória com Origens na Química Quântica”, *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.*, v. 1, pp. 1 – 10.
- [2] ABREU, N. M. M., 2007, “Old and new results on algebraic connectivity of graphs”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 423, pp. 53 – 73.
- [3] ABREU, N. M. M., DEL-VECCHIO, R. R., VINAGRE, C. T. M., et al., 2007, *Introdução à Teoria Espectral de Grafos com Aplicações*. São Carlos, Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.
- [4] ANDERSON, W. N., MORELY, T. D., 1985, “Eigenvalues of the Laplacian of a graph”, *Linear and Multilinear Algebra*, v. 18, pp. 141–145.
- [5] AOUCICHICHE, M., HANSEN, P., in press, “A survey of Nordhaus-Gaddum type relations”, *Discrete Applied Mathematics*.
- [6] BAO, Y. H., TAN, Y. Y., FAN, Y. Z., 2009, “The Laplacian spread of unicyclic graphs”, *Applied Mathematics Letters*, v. 22, pp. 1011 – 1015.
- [7] BIGGS, N., 1993, *Algebraic Graph Theory*. Cambridge, Cambridge University Press.
- [8] BRIGHAM, R. C., DUTTON, R. D., 1984, “Bounds on the graph spectra”, *J. Combin. Theory Ser. B*, pp. 228 – 234.
- [9] BROUWER, A. E., HAEMERS, W. H., 2011. “Spectra of Graphs”. disponível em: <http://cwi.nl/aeb/math/ipm.pdf>, acesso em: setembro.
- [10] BRUALDI, R. A., SOLHEID, E. S., 1986, “On the spectral radius of connected graphs”, *Publications de L’Institut Mathématique(BEOGRAD)(N.S.)*, v. 39, n. 53, pp. 45 – 54.
- [11] CAPOROSSI, G., HANSEN, P., 2000, “Variable neighborhood search for extremal graphs:1 The AutoGraphiX system”, *Discrete Mathematics*, v. 212, pp. 29 – 44.

- [12] CHARTRAND, G., ZHANG, P., 2009, *Chromatic Graph Theory*. New York, CRC Press.
- [13] CHEN, Y., WANG, L., 2009, “The Laplacian Spread of Tricyclic Graphs”, *The electronic journal of combinatorics*, v. 16.
- [14] CHVÁTAL, V., HAMMER, P. L., 1977, “Aggregation of inequalities in integer programming”, *Annals Dis. Math.*, v. 1, pp. 145–162.
- [15] COLLATZ, L., SINOGOWITZ, U., 1957, “Spektren endlicher Grafen”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, v. 21, pp. 63 – 77.
- [16] CVETKOVIĆ, D., 1971, “Graphs and their spectra”, *Publ. Elektrotehn*, v. 354, pp. 1 – 50.
- [17] CVETKOVIĆ, D., 2010. “Spectral Theory of Graphs Based on The Signless Laplacian”. Mathematical Institute SANU, disponível em: http://www.mi.sanu.ac.rs/projets/signless_L_reportJan28.pdf, acesso em: Agosto.
- [18] CVETKOVIĆ, D., DOOB, M., SACHS, H., 1979, *Spectra of Graphs*. New York, Academic Press.
- [19] CVETKOVIĆ, D., DOOB, M., GUTMAN, I., 1982, “On graphs whose eigenvalues do not exceed $(2 + \sqrt{5})$ ”, *Ars Combinatória*, v. 14, pp. 225 – 239.
- [20] CVETKOVIĆ, D., ROWLINSON, P., SIMIĆ, S., 1997, *Eigenspaces of graphs*. Cambridge, Cambridge University Press.
- [21] CVETKOVIĆ, D., ROWLINSON, P., SIMIĆ, S. K., 1997, “Signless Laplacians of finite graphs”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 423, pp. 155 – 171.
- [22] CVETKOVIĆ, D., ROWLINSON, P., SIMIĆ, S., 2010, *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*. New York, Cambridge University Press.
- [23] DAM, E. R. V., HAEMERS, W. H., 2003, “Which graphs are determined by their spectrum?” *Linear Algebra and its Applications*, v. 373, pp. 241 – 272. Combinatorial Matrix Theory Conference (Pohang, 2002).
- [24] DAS, K., 2003, “An improved upper bound for laplacian graph eigenvalues”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 368, pp. 269 – 278.
- [25] DAS, K. C., 2010, “On conjectures involving second largest signless Laplacian eigenvalue of graphs”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 432, pp. 3018 – 3029.

- [26] DAS, K. C., KUMAR, P., 2004, “Some new bounds on the spectral radius of graphs”, *Discrete Mathematics*, v. 281, pp. 149 – 161.
- [27] FAN, Y. Z., WANG, Y., GAO, Y. B., 2008, “Minimizing the least eigenvalues of unicyclic graphs with application to spectral spread”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 429, pp. 577 – 588.
- [28] FAN, Y. Z., LI, S. D., TAN, Y. Y., 2010, “The Laplacian Spread of Bicyclic Graphs”, *Journal of Mathematical Research and Exposition*, v. 30, n. 17 - 28.
- [29] FAN, Y., XU., J., WANG, Y., et al., 2008, “The Laplacian Spread of a Tree”, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, v. 10, pp. 79 – 86.
- [30] FIEDLER, M., 1973, “Algebraic connectivity of graphs”, *Czechoslovak Mathematical Journal*, v. 23, pp. 298 – 305.
- [31] GAREY, M., JOHNSON, D., 1979, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*. New York.
- [32] GODSIL, C., ROYLE, G., 2001, *Algebraic Graph Theory*. New York, Springer.
- [33] GOLUBIC, M., 1980, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. New York, Academic Press, Inc.
- [34] GREGORY, D. A., HERSHKOWITZ, D., KIRKLAND, S. J., 2001, “The spread of the spectrum of a graph”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 332-334, pp. 23 – 35.
- [35] GRONE, R., MERRIS, R., 1994, “The Laplacian spectrum of a graph II”, *SIAM J. Discrete Math*, v. 7, pp. 229–237.
- [36] GROSS, J., YELLEN, J., 2003, *Handbook of Graph Theory*. New York, CRC Press.
- [37] GROSS, J., YELLEN, J., 2006, *Graph Theory and Its Applications*. New York, CRC Press.
- [38] HALE, W. K., 1980, “Frequency Assignment: Theory and Applications”, *Proceedings of the IEEE*, v. 68, pp. 1497 – 1514.
- [39] HANSEN, P., LUCAS, C., 2010, “Bounds and conjectures for the signless Laplacian index of graphs”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 432, pp. 3319 – 3336.

- [40] HEUVEL, J. V. D., PEJIĆ, S., 2000, “Using Laplacian Eigenvalues and Eigenvectors in the Analysis of Frequency Assignment Problems”, *Publ. Inst. Math. (Beograd)*.
- [41] HOFFMAN, A. J., 1970, “On eigenvalues and colorings of graphs”, *Acadêmic Press*, pp. 79–91.
- [42] HONG, Y., 1986, “On the spectra of unicyclic graph”, *J. East China Norm. Univ. Natur. Sei*, pp. 31 – 34.
- [43] HORN, R. A., JONHSON, C., 1985, *Matrix Analysis*. Cambridge, Cambridge University Press.
- [44] JOHNSON, C. R., KUMAR, R., WOLKOWICZ, H., 1985, “Lower bounds for the spread of a matrix”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 71, pp. 161 – 173.
- [45] KIRKLAND, S. J., MOLITIERNO, J. J., NEUMANN, M., 2002, “On graphs with equal algebraic and vertex connectivity”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 341, pp. 45 – 46.
- [46] LIMA, E., 2000, *Álgebra Linear (Quarta edição)*. Rio de Janeiro, Coleção Matemática Universitária.
- [47] LIMA, L. S., OLIVEIRA, C. S., ABREU, N. M. M., et al., 2011, “The smallest eigenvalue of the signless Laplacian”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 435, pp. 2570 – 2584.
- [48] LIU, B., MUHUO, L., 2009, “On the spread of the spectrum of a graph”, *Discrete Mathematics*, v. 309, n. 9, pp. 2727 – 2732.
- [49] LIU, M., LIU, B., 2010, “The signless Laplacian spread”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 432, pp. 505 – 514.
- [50] MERRIS, R., 2001, *Graph Theory*. Canada, Wiley-Interscience Publication.
- [51] MERRIS, R., 1994, “Laplacian matrices of graphs: A survey”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 197, pp. 143–176.
- [52] MIRSKY, L., 1957, “Inequalities for normal and Hermitian matrices”, *Duke Math*, v. 24, pp. 591 – 599.
- [53] M.LIU, LIU, B., 2010, “Some results on the Laplacian spectrum”, *Computers and Mathematics with Applications*, v. 59, pp. 3612 – 3616.

- [54] NETTO, P. O. B., 2006, *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritimos*. São Paulo, Editora Edgard Blucher.
- [55] NIKIFOROV, V., 2007, “Chromatic number and spectral radius”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 426, pp. 810 – 814.
- [56] NYLEN, P., TAM, T. Y., 1994, “On the Spread of a Hermetian Matrix and a Conjecture of Thompson”, *Linear and Multilinear Algebra*, v. 37, pp. 3 – 11.
- [57] OLIVEIRA, A. J., ABREU, N. M. M., LIMA, L. S., 2010, “Spread Versus o Número Cromático de um grafo”, *XLII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*.
- [58] OLIVEIRA, C. S., LIMA, L. S., ABREU, N. M. M., et al., 2010, “Bounds on the Q-spread of a graph”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 432, pp. 2342 – 2351.
- [59] PETROVIĆ, M., 1983, “On Graphs Whose Spectral Spread Does Not Exceed 4”, *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, v. 34 (48), pp. 169 – 174.
- [60] READ, R. C., WILSON, R. J., 1998, *An Atlas of Graphs*. New York, Clarendon Press.
- [61] THOMPSON, R. C., 1992, “The Eigenvalue Spreads of a Hermetian Matrix and its Principal Submatrices”, *Linear and Multilinear Algebra*, v. 32, pp. 327 – 333.
- [62] WILF, H. S., 1967, “The eigenvalues of a graph and its chromatic number”, *J. London Math. Soc.*, v. 42, pp. 330 – 332.
- [63] WILSON, R. A., 2002, *Graphs, Colourings and the Four-colour Theorem*. New York, Oxford Science Publications.
- [64] YAN, C., 2002, “Properties of Spectra of Graphs and Line Graphs”, *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B*, pp. 371 – 376.
- [65] YOU, Z., LIU, B., 2010, “The minimum Laplacian spread of unicyclic graphs”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 432, pp. 499 – 504.
- [66] ZHAI, M., J. SHUA, HONGA, Y., 2011, “On the Laplacian spread of graphs”, *Applied Mathematics Letters*, v. 24, pp. 2097 – 2101.

Índice Remissivo

- Árvore, 13
 - de arestas, 13
 - de vértice, 13
- Atribuição viável, 26
- Autovalor, 5
- Autovetor, 5
- Base
 - ortogonal, 7
 - ortonormal, 7
- base, 7
- Cadeia, 12
- Caminho
 - simples, 12
- Caracterizado pelo espectro, 18
- Ciclo, 12
- Cintura de um grafo, 12
- Coespectral, 18
- Coloração, 21
 - de vértices, 26
 - própria, 21
- Combinação linear, 6
- Componete conexa, 12
- Conectividade
 - de arestas, 13
 - de vértices, 13
- Corte
 - de arestas, 13
 - de vértice, 13
- Espectro da matriz, 6, 15
- estrela dupla, 54
- Floresta, 13
- Folha, 13
- Frequência atribuída, 26
- Grafo
 - G_k , 63
 - k -colorível, 21
 - k -partido completo, 13
 - k -partido, 13
 - k -regular, 14
 - bicíclico, 13
 - nulo, 11
 - tricíclico, 13
 - trivial, 11
 - bipartido, 13, 19
 - complementar, 11
 - completo, 11
 - conexo, 12
 - estrela, 13
 - linha, 13
 - minimal, 12

não separável, 13

regular, 20

unicíclico, 13

grafo

- book, 70
- split, 14
- split completo, 14
- threshold, 14

Grafos

- isomorfos, 11

Grau

- máximo de um grafo, 11
- médio de um grafo, 11
- mínimo de um grafo, 11
- de um vértice, 11

Invariantes espectrais, 22

Matriz

- de restrição, 26
- laplaciana, 15
- laplaciana sem sinal, 15
- de adjacência, 15
- diagonalizável, 7
- invertível, 6
- irredutível, 8
- laplaciana, 16
- não negativa, 8
- ortogonal, 7
- particionada em blocos, 9
- redutível, 8

semelhante, 7

semidefinida positiva, 8

simétrica, 6

singular, 6

transposta, 6

Multiplicidade algébrica, 6

Multiplicidade geométrica, 6

Número

- cromático, 21

Número de independência, 12

Norma euclidiana, 7

Operações

- join, 12
- soma direta, 12

Particionamento de um grafo, 26

Permutação, 8

Polinômio característico, 6, 15

Ponte, 12

Problema

- de T -coloração, 27
- de Atribuição de Frequência, 26

Produto escalar, 7

Raio espectral, 9

Relação

- entre o número cromático e o span, 27
- entre os autovalores, 19

Span, 27

Spread

- da matriz laplaciana, 40
- da matriz adjacência, 30
- da matriz laplaciana sem sinal, 41
- de uma matriz arbitrária, 29

Spread laplaciano, 51

Subgrafo, 11

- induzido, 12
- maximal, 12
- completo maximal, 12
- induzido maximal, 12

Submatriz, 10

- principal, 10

Traço de uma matriz, 7

Vértice

- de articulação, 12
- universal, 11

Vértices

- adjacentes, 11
- isolados, 11

Vetores

- linearmente dependentes, 6
- linearmente independentes, 6
- unitários, 7